

# Докторске студије

## Студијски програм *Нумеричка математика и оптимизација*

Циљеви: Оспособљавање студента за развој и примену научних и стручних достигнућа из области нумеричке математике и оптимизација и оспособљавање за креативан рад

Врста студија: Докторске академске студије

Исход процеса учења: Оспособљавање студента за даље усавршавање и самостални научни и стручни рад

Академски назив: Доктор математике

Услови за упис Завршене студије другог степена из области математике

Начин извођења 3 године у 6 семестара од по 15 седмица

Начин избора предмета из других студијских програма:

У оквиру овог студијског програма, студент може највише два изборна предмета заменити предметима са других студијских програма трећег степена који се изводе на Математичком факултету

Услови за прелазак са других студијских програма:

Студент треба да има одговарајући број положених испита који одговарају испитима из овог студијског програма, односно да оствари потребан број ЕСПБ бодова.

### Листа А - обавезни предмети

	пред.	веж.	мент. рад	ЕСПБ бодови
Анализа 4, функционални простори	6	0	14	30
Теорија екстремалних проблема	6	0	14	30
Нумеричка анализа 3	4	0	10	20

**Листа Б – изборни предмети, студент бира 2 предмета**

Метод коначних елемената	3	0	7	15
Метод граничних елемената	3	0	7	15
Метод коначних разлика	3	0	7	15
Нумеричке методе линеарне алгебре	3	0	7	15
Нелинеарне једначине	3	0	7	15
Теорија апроксимација	3	0	7	15
Нумеричке методе интерполације	3	0	7	15
Нумеричка интеграција	3	0	7	15
Линеарно програмирање	3	0	7	15
Семиинфинитно програмирање	3	0	7	15
Нелинеарно програмирање	3	0	7	15
Теорија игара	3	0	7	15
Неопходни и довољни услови екстрема	3	0	7	15
Оптimalно управљање	3	0	7	15
Нумеричке методе оптимизације	3	0	7	15
Методе регуларизације	3	0	7	15
Дискретна оптимизација	3	0	7	15
Целобројно програмирање	3	0	7	15
Математичко моделирање	3	0	7	15
Предмети других студијских програма докторских студија (највише 2)				

**Специјални курс – бира се у договору са ментором из области из које је дисертација**

Израда дисертације (у два семестра)	2	0	4	10
	0	0	20	60

# Садржаји предмета

---

## АНАЛИЗА 4

Фонд 6+0+14 30 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Интеграција на локално компактним просторима. Функционали на простораима непрекидних функција. Максималне функције. Интерполационе теореме Marciniwicz-а и Riesz – Thorin-а. ЛИНЕАРНИ ТОПОЛОШКИ ПРОСТОРИ. Дефиниција и основна својства. Својства раздвајања. Линеарна пресликавања. Конаднодимензиони простори. Метризабилни простори. Ограниченост и непрекидност. Полуноorme и локално конвексни простори. Теорема Колмогорова. Квоцијент-простори. Примери. КОМПЛЕТНОСТ. Берова теорема о категорији. Еквинепрекидност и теореме Банаха-Штајнхауза. Теореме о отвореном пресликавању и затвореном графику. Билинеарна пресликавања. КОНВЕКСНОСТ. Хан-Банахове теореме (геометријски и аналитички облик). Слабе топологије. Поларе и Алаоглуова теорема. Раздвајање конвексних компактних скупова. Екстремалне тачке и Крејн-Милманова теорема. ДУАЛНОСТ У БАНАХОВИМ ПРОСТОРИМА. Нормирани дуал нормираног простора. Други дуал и рефлексивни простори. Дуални оператори. Компактни оператори. Фредхолмова теорија.

### Литература:

W. Rudin: *Real and Complex Analysis*.  
E. M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*.  
W. Rudin: *Functional Analysis*

---

## ТЕОРИЈА ЕКСТРЕМАЛНИХ ЗАДАТАКА

Фонд 6+0+14 30 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Теореме о раздвајању конвексних скупова. Дуалност конвексних функција. Локално конвексна анализа. Метода пертурбовања и теорема дуалности у конвексном програмирању. Егзистенција решења и дуалност у линеарном програмирању. Неопходни и довољни услови за Лапуновљев проблем. Максимално решења диференцијалне једначине. Резолвента линеарне диференцијалне једначине. Диференцијабилност максималног решења диференцијалне једначине. Понтријагинов принцип максимума (са доказом) као неопходан услов оптималности у оптималном управљању.

### Литература:

A. D. Ioffe, V. M. Tikhomirov. *Teorija ehkstremljnyh zadach*, Nauka, Moskva, 1974  
V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin. *Optimaljnoe Upravlenie*, Nauka, Moskva, 1979  
A. W. Roberts, D. E. Varberg. *Convex Functions*. Academic Press, New York and London, 1973

---

## НУМЕРИЧКА АНАЛИЗА 3

Фонд 4+0+10

20 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Моделни проблеми описани парцијалним диференцијалним једначинама (проток саобраћаја, провођење топлоте, осциловање жице и мембране). Кошијеви проблеми. Методе типа Рунге-Кута. Гранични проблеми. Метода мреже. Мешовити проблеми. Ковергенција. Стабилност. Грешка. Сингуларни проблеми. Конзервацијске методе. Мултигрид алгоритми.

### Литература:

Richtmyer R.D., Morton K.W., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Wiley, 1967.

LeVeque R.J., *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkhauser, 1990.

Briggs W.L., Henson V.E., McCormik S.F., *A Multigrid tutorial*, SIAM, 2000.

---

## МЕТОДА КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Варијациона формулација граничног проблема. Ritz-Galerkin-ова метода, метода колокације и метода најмањих квадрата. Коначни елементи у једној и две димензије. Коначни елементи вишег реда. Хијерархијски коначни елементи. Изопараметарски елементи. Анализа грешке у различитим нормама. Нумеричка интеграција и њен утицај на грешку методе. Рачунски алгоритми и софтверски пакети.

### Литература:

Morton K.W., *Basic Course in Finite Element Methods*, Oxford University Computing Laboratory, 1986.

Strang G., Fix G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.

Akin J.E., *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, 1982.

---

## МЕТОДА ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат. Ритзова и Галеркинова метода. Коначни елементи. Фундаментално решење. Гринова функција. Гранична интегрална једначина. Гранични елементи. Вишедимензиони случај. Нестационарни задаци.

### Литература:

C. Brebbia, S. Walker, *Boundary Elements Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London etc. 1980.

Strang G., Fix G., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1973.

---

---

## МЕТОДА КОНАЧНИХ РАЗЛИКА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат теорије диференцијских схема. Принцип максимума. Енергетска метода. Апроксимација. Конвергенција. Конзервативност. Монотоност. Стабилност. Економичност.

### Литература:

A. Samarskii, *Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

B. Jovanović, *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina*, Savremena računска tehnika i njena primena, knj. 8, Mat. Institut, Beograd, 1989

---

## НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ЛИНЕАРНЕ АЛГЕБРЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат. Специјални типови матрица. Функције матрица. Норме вектора и матрица. Стабилност. Директне методе. Итеративне методе. Паралелни алгоритми. Матричне једначине.

### Литература:

P. Lankaster, *Theory of matrices*, Academic Press, New York, London, 1969.

R. Horn, C. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge university press, Cambridge 1986.

R. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

V. Voevodin, Yu. Kuznecov, *Matricy i vychisleniya*, Nauka, Moskva 1984.

---

## НЕЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат. Теореме егзистенције. Контракције. Монотона и коерцитивна пресликавања. Итерационе методе. Градијентне методе. Локална конвергенција. Глобална конвергенција.

### Литература:

J. Ortega, W. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press 1970.

A. Ostrowski, *Reshenie uravnenii i sistem uravnenii*, IL, Moskva 1963.

---

## ТЕОРИЈА АПРОКСИМАЦИЈА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат. Апроксимација у Хилбертовом и Банаховом простору. Средњеквадратна апроксимација. Ортогонални полиноми. Метода најмањих квадрата. Фуријеова анализа. Дискретна Фуријеова трансформација; FFT. Таласићи. Примена на обраду сигнала и слике. Равномерна апроксимација.

### Литература:

Natanson I.P., *Constructive Function Theory (part I-III)*, Frederick Ungar Publishing, 1965.

Radunović D., *Talasići*, Akademska misao, 2005.

Strang G., Nguyen T., *Wavelets and Filter Banks*, Willesley-Cambridge Press, 1996.

---

## НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ИНТЕРПОЛАЦИЈЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат. Интерполациони полиноми. Тригонометријска интерполација. Генералисани полиноми. Рационална интерполација. Сплајн функције. Интерполација помоћу сплајнова. Таласићи.

### Литература:

V. Goncharov, *Teoriya interpolirovaniya i priblizheniya funkcii*, Nauka, Moskva.

J. Alberg, E. Nilson, J. Walsh, *Theory of Splines and Applications*, (ruski prevod: Mir, Moskva 1982).

---

## НУМЕРИЧКА ИНТЕГРАЦИЈА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Математички апарат. Квадратурне и кубатурне формуле. Њутн-Котесове формуле. Ортогонални полиноми. Формуле Гаусовог типа. Методе Монте Карло.

### Литература:

S. Nikol'skii, *Kvadrturnye formuly*, Fizmatgiz, Moskva 1974.

G.V. Milovanovic, D.S. Mitrinovic, Th.M. Rassias: *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*, World Scientific Publ. Co., Singapore - New Jersey - London - Hong Kong, 1994.

A. Stroud, D. Secrest, *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, 1986.

---

## ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Фонд 3+0+7 15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Теорија линеарног програмирања. Симплекс и дуалсимплекс метода. Полиномијалне методе решавања. Унутрашње методе. Примена линеарног програмирања у комбинаторном и целобројном програмирању.

---

## СЕМИИНФИНИТНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Фонд 3+0+7 15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Теорија и нумеричке методе семиинфинитног програмирања.

---

## НЕЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Фонд 3+0+7 15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Теорија конвексног и диференцијабилног програмирања. Методе оптимизације без ограничења и са ограничењима. Глобална оптимизација.

---

## ТЕОРИЈА ИГАРА

Фонд 3+0+7 15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Игре у екстензивној форми. Антагонистичке игре. Бескоалиционе игре. Кооперативне игре. Примене у економији и другим областима.

---

## НЕОПХОДНИ И ДОВОЉНИ УСЛОВИ ЕКСТРЕМА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Методе за доказивање неопходних услова екстремума:

- Метода Дубовицког и Миљутина, развијена од стране Гирсанова.

- Метода шатора коју је засновао Болтјански.

Неопходни и довољни услови за квадратни проблем. Неопходни и довољни услови другог реда за глатке проблеме.

### Литература:

I. V. Girsanov. *Lekcii po matematicheskoj teorii ehkstremal'nyh zadach*, Moskovskij universitet, 1970

V. G. Boltjanskij. *Metod shatrov v teorii ehkstremal'nyh zadach*, Uspehi matematicheskikh nauk, t. XXX, вып. 3 (183), 1975, 3-55.

V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin. *Optimal'noe Upravlenie*, Nauka, Moskva, 1979

V. Janković, *Neophodni uslovi za glatke i konveksne probleme*, Zbonik radova sa XXV SYM-OP-IS-a, 1998, 427-430.

V. Janković, *Needle variation*, J. Math. Sci., New York 110, No.2, 2002, 2558-2571

V. Janković, *Tent theory*, J. Math. Sci., New York 110, No.2, 2002, 2572-2582

V. Janković, *Optimal control problem on a bounded interval*, J. Math. Sci., New York 110, No.2, 2002, 2583-2589

---

## ОПТИМАЛНО УПРАВЉАЊЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Неопходни и довољни услови оптималности и егзистенције решења за линеарни проблем најбржег дејства. Проблем синтезе за линеарни проблем најбржег дејства. Синтезе и довољни услови оптималности за општи проблем оптималног управљања.

### Литература:

V. G. Boltjanskij. *Matematicheskie metody ooptimal'nogo upravljenija*, Nauka, Moskva, 1969

V. Janković, *The Linear Optimal Control Problem with Variable Endpoints*, Publ. Inst. Mat., 45(59), 1989, 133-142.

V. Janković, *Linear Optimal Control Problem in Plane*, Publ. Inst. Mat., 47(61), 1990, 88-98.

---

## НУМЕРИЧКЕ МЕТОДЕ ОПТИМИЗАЦИЈЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Диференцирање у Банаховим и Хилбертовим просторима. Неопходни и довољни услови екстремума. Теореме егзистенције решења. Методе оптимизације у функционалним просторима.

### Литература:

Vasil'ev F.P., *Metody reshenya ekstremal'nih zadach*, Nauka, Moskva, 1981.

Vasil'ev F.P., *Chislenie metody reshenya ekstremal'nih zadach*, Nauka, Moskva, 1988.

Gill P.E., Murray W., Wright, M.H., *Practical Optimization*, Academic Press, 1981.



---

## МЕТОДЕ РЕГУЛАРИЗАЦИЈЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Некоректни задаци, стабилизатор, нормално решење. Разне методе регуларизације. Апроксимације задатака оптимизације и регуларизација апроксимације задатка.

### Литература:

А. Tihonov, V. Arsenin, *Metody resheniya nekorrektnyh zadach*, Nauka, Moskva 1979.  
Vasil'ev F.P., *Metody resheniya ekstremal'nih zadach*, Nauka, Moskva, 1981.

---

## ДИСКРЕТНА ОПТИМИЗАЦИЈА

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Дискретне математичке структуре. Основни задаци и алгоритми на графовима и мрежама и њихова сложеност. Други значајни проблеми дискретне оптимизације. Хеуристичке методе за решавање дискретних проблема.

---

## ЦЕЛОБРОЈНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Целобројно линеарно програмирање. Целобројни полиедри.. Методе одсецања. Методе претраживања. Путеви и токови. Спаривања и покривања. Матроиди и субмодуларне функције.

---

## МАТЕМАТИЧКО МОДЕЛИРАЊЕ

Фонд 3+0+7

15 ЕСПБ бодова

### Садржај:

Принципи и технике у изградњи математичких модела. Континуални, дискретни, стохастички модели. Моделирање обичним и парцијалним диференцијалним једначинама. Моделирање задацима оптимизације. Израда модела и њихово решавање уз помоћ софтверских пакета за моделирање, нумеричку и симболичку манипулацију подацима. Визуелно представљање резултата.

### Литература:

Gander W., Hrebicek J., *Solving Problems in Scientific Computing Using Maple and Matlab*, fourth edition, Springer, 2004.  
Bossel H., *Modeling and Simulation*, Wellesley, 1994.  
Mesterton-Gibbons M., *A Concrete Approach to Mathematical Modelling*, Wiley, 1995.  
Edelstein-Keshet L., *Mathematical Models in Biology*, SIAM, 2005.  
Samarskii, A.A., Mihailov, A.P., *Matematicheskoe modelirovanie*, FIZMATLIT, 2002.