Automatsko rezonovanje – beleške sa predavanja Rezonovanje u logici prvog reda sa jednakošću

Milan Banković (po slajdovima Filipa Marića)

*Matematički fakultet,
Univerzitet u Beogradu

Prolećni semestar 2024/25.

Pregled

Poseban tretman jednakosti

Kako interpretiramo simbol jednakosti?

Do sada je simbol $=$ bio tretiran kao bilo koji drugi predikatski simbol.

Primer

Za očekivati je da je formula

$$\forall x\ y\ z.\ x = y \wedge y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

valjana, međutim, ona to nije. Po do sada izloženom, ova formula se ni po čemu ne razlikuje od formule

$$\forall x\ y\ z.\ p(x, y) \wedge p(y, z) \Rightarrow p(f(x), f(z)),$$

za koju je jasno da nije valjana (npr. netačna je kada se f interpretira identičkom funkcijom, a p nekom netranzitivnom relacijom).

Poseban tretman jednakosti

Poželjno je da jednakost bude jednakost

- Ipak, uloga jednakosti je centralna u matematici tako da je poželjno posmatrati samo one interpretacije u kojima se simbol '$=$' interpretira upravo relacijom jednakosti.
- Iako se prethodno opisane procedure jednostavno modifikuju tako da u obzir uzmu samo ovakve modele, moguća je i izrada efikasnijih procedura, specijalizovanih za rezonovanje u prisustvu jednakosti.

Normalne interpretacije

Definicija

Ako signatura $\mathcal{L}$ sadrži simbol $=$, za $\mathcal{L}$-strukturu (model, interpretaciju) kažemo da je normalna ako se simbol $=$ interpretira relacijom jednakosti odgovarajućeg domena D (tj. relacijom $\{(x, x) \mid x \in D\}$)

Definicija

Logika prvog reda sa jednakošću je fragment logike prvog reda u kome razmatramo samo signature koje sadrže simbol $=$, pri čemu se ograničavamo samo na normalne interpretacije.

Zadovoljivost, valjanost, ...

Definicija

Formula F je valjana u logici prvog reda sa jednakošću ako je tačna u svim normalnim interpretacijama. Formula F je zadovoljiva u logici prvog reda sa jednakošću ako ima normalni model.

Definicija

Formula F je logička posledica skupa formula Δ u logici prvog reda sa jednakošću (u oznaci $\Delta \models F$ ako je tačna u svim normalnim interpretacijama u kojima su tačne i sve formule iz Δ.

Definicija

Formule F i G su logički ekvivalentne (u oznaci $F \equiv G$) ako važi $F \models G$ i $G \models F$, tj. ako se interpretiraju isto u svim normalnim interpretacijama.

Aksiome jednakosti

Aksiome jednakosti

S obzirom da je relacija jednakosti relacija ekvivalencije, u svim normalnim interpretacijama naredne formule su tačne.

refleksivnost	:	$\forall x.\ x = x$
simetričnost	:	$\forall x\ y.\ x = y \Leftrightarrow y = x$
tranzitivnost	:	$\forall x\ y\ z.\ x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

Takođe, za svaki n-arni funkcijski simbol f odnosno svaki n-arni predikatski simbol p tačne su i formule kongruentnosti

$$\forall x_1 \ldots x_n\ y_1 \ldots y_n.\ x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

$$\forall x_1 \ldots x_n\ y_1 \ldots y_n.\ x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n \Rightarrow p(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow p(y_1, \ldots, y_n)$$

Navedene formule nazivamo aksiomama jednakosti. Oznaka $eqax(\mathcal{L})$ označava aksiome jednakosti jezika $\mathcal{L}$.

Aksiome jednakosti

Aksiome jednakosti i normalne interpretacije

- Svaka normalna interpretacija zadovoljava aksiome jednakosti.
- Međutim, postoje interpretacije koji nisu normalne, a opet zadovoljavaju aksiome jednakosti.

Primer

Ukoliko se jezik $\mathcal{L} = \{+, \cdot, 0, 1, =\}$ *interpretira uobičajeno na skupu prirodnih brojeva, a simbol* $=$ *relacijom* $x \equiv y (mod\ 2)$, *model zadovoljava aksiome jednakosti, a nije normalan.*

- Na žalost, nije moguće aksiomatski se ograničiti samo na normalne modele.
- Na sreću, to nam, sa stanovišta rezonovanja, nije ni neophodno.

Veza između normalnih modela i modela aksioma jednakosti

Stav

Formula F jezika $\mathcal{L}$ ima normalan model akko F i $eqax(\mathcal{L})$ imaju model.

Dokaz

Ako F ima normalan model on je model u kome su i F i $eqax(\mathcal{L})$ tačne.
Obratno, ako postoji model za F i $eqax(\mathcal{L})$ može se definisati relacija $\sim$ na domenu D takva da je $x \sim y$ akko $x =_{\mathcal{M}} y$, tj. kada su x i y jednaki po interpretaciji M. Pošto u M važe $eqax(\mathcal{L})$ relacija $\sim$ je relacija ekvivalencije. Traženi normalni model se može jednostavno izgraditi nad klasama ekvivalencije relacije $\sim$ kao domenom.

Veza između normalnih modela i modela aksioma jednakosti

Stav

- *Formula F je zadovoljiva u nekom normalnom modelu akko je formula $F \wedge eqax(\mathcal{L})$ zadovoljiva (u opštoj logici prvog reda).*
- *Formula F važi u svim normalnim modelima akko je formula $eqax(\mathcal{L}) \Rightarrow F$ valjana (u smislu opšte logike prvog reda).*

Pregled

Poluodlučivost i (ne)odlučivost

Teorema

Logika prvog reda sa jednakošću je poluodlučiva: za svaku formulu koja je valjana (tj. tačna u svim normalnim modelima) je moguće utvrditi da je valjana.

Teorema

Logika prvog reda sa jednakošću nije odlučiva.

Kompaktnost

Teorema

Skup formula je zadovoljiv u logici prvog reda sa jednakošću (tj. tačan u nekom normalnom modelu) akko je svaki njegov konačan podskup zadovoljiv (u nekom normalnom modelu).

O konačnim modelima

Šta je moguće reći o kardinalnostima?

- U opštoj logici prvog reda nismo mogli da fiksiramo da skup formula ima samo modele neke fiksirane konačne kardinalnosti
- U logici prvog reda sa jednakošću to možemo. Npr. formula $\exists x_1 x_2 x_3.\ x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge (\forall y.\ y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)$ ima samo normalne modele kardinalnosti 3
- Medjutim, ne možemo da se ograničimo samo na konačne modele (proizvoljne kardinalnosti)

Teorema

Ukoliko skup formula Δ ima normalne modele svih mogućih konačnih kardinalnosti, tada ima i normalan model beskonačne kardinalnosti.

Dokaz

Neka je formula $\phi_n = \exists x_1 x_2 \dots x_n . x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{n-1} \neq x_n$. Ovu formulu zadovoljavaju svi normalni modeli kardinalnosti veće ili jednake od n. Posmatrajmo skup formula $\Phi = \Delta \cup \{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Svaki konačan podskup ovog skupa je zadovoljiv (jer po pretpostavci za skup Δ postoji konačan model bilo koje kardinalnosti). Na osnovu teoreme kompaktnosti, sledi da je i ceo skup Φ zadovoljiv. Medjutim, jasno je da njegov model mora biti beskonačan.

Skolem-Lovenhajmova teorema

A šta je sa beskonačnim kardinalnostima?

- Kada su u pitanju beskonačne kardinalnosti, ni ovde ne možemo ni na koji način fiksirati kardinalnost modela.
- Drugim rečima, važe Skolem-Lovenhajmove teoreme (na dole i na gore).

Teorema

Ukoliko najviše prebrojiv skup formula ima beskonačan normalan model, tada ima i prebrojiv normalan model.

Teorema

Ukoliko najviše prebrojiv skup formula ima prebrojiv normalan model, tada on ima i normalan model bilo koje veće kardinalnosti.

Pregled

Rezolucija u jednakosnoj logici

Metod rezolucije i jednakost

- Metod rezolucije je bio jedan metod poluodlučivanja za opštu logiku prvog reda
- Ovaj metod se može koristiti i kao procedura poluodlučivanja za logiku prvog reda sa jednakošću
- Za to je dovoljno klauzalnoj formi formule F čiju zadovoljivost ispitujemo dodati aksiome jednakosti (prethodno konvertovane u klauzalnu formu)

Rezolucija u jednakosnoj logici

Primer

Da bismo dokazali da je formula

$$\forall x\ y\ z.\ x = y \land y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

valjana u jednakosnoj logici, možemo je najpre negirati, a zatim njenu negaciju svesti u klauzalni oblik. Dobijamo klauze:

$$\begin{array}{ll} 1) & a = b \\ 2) & b = c \\ 3) & f(a) \neq f(c) \text{ (}\textit{kraći zapis za } \neg(f(a) = f(c))\text{)} \end{array}$$

Dodajmo tome i klauze koje predstavljaju aksiome jednakosti (one koje su nam potrebne ovde):

$$\begin{array}{ll} 4) & x \neq y \lor y \neq z \lor x = z \\ 5) & u \neq v \lor f(u) = f(v) \end{array}$$

Sada iz 1 *i* 4 *pravilom rezolucije dobijamo* 6) $b \neq z \lor a = z$, *a iz* 2 *i* 6 *dobijamo* 7) $a = c$. *Najzad, iz* 7 *i* 5 *dobijamo* 8) $f(a) = f(c)$, *pa iz* 3 *i* 8 *dobijamo praznu klauzu.*

Paramodulacija

Kako rezoluciju u prisustvu jednakosti učiniti efikasnojom?

- Iako je prethodni primer bio prilično jednostavan, u slučaju složenijih tvrdjenja ovakav način dokazivanja postaje prilično neefikasan
- Najveći problem je utvrditi na koji način instancirati aksiome jednakosti
- Bolja ideja je da probamo da metod rezolucije obogatimo dodatnim pravilom koje će omogućiti jednakosno rezonovanje, bez uvodjenja aksioma jednakosti
- Jedno takvo pravilo je pravilo paramodulacije

Paramodulacija

Definicija

Pravilo paramodulacije glasi:

$$\frac{C_1 \vee s = t \ (\text{ili } t = s) \quad C_2 \vee L[t']}{(C_1 \vee C_2 \vee L[s])\sigma}$$

gde je σ najopštiji unifikator za termove t i t'.

Napomene

- Može se pokazati da pravilo paramodulacije ima svojstvo saglasnosti
- Takodje, koristeći samo paramodulaciju i rezoluciju, iz refleksivnosti je moguće dokazati simetričnost i tranzitivnost jednakosti, kao i kongruentnost
- Otuda je za kompletnost (za pobijanje) u jednakosnoj logici dovoljan metod rezolucije koji pored pravila paramodulacije implicitno podrazumeva i univerzalno kvantifikovanu jediničnu klauzu $x = x$

Paramodulacija

Primer

Posmatrajmo ponovo formulu

$$\forall x\ y\ z.\ x = y \wedge y = z \Rightarrow f(x) = f(z)$$

za koju dokazujemo da je valjana u jednakosnoj logici, tako što dokazujemo nezadovoljivost skupa klauza:

$$\begin{array}{ll} 1) & a = b \\ 2) & b = c \\ 3) & f(a) \neq f(c) \end{array}$$

Paramodulacijom iz 1) *i* 2) *(za* $s = a$, $t = b$, $t' = b$*) dobijamo* 4) $a = c$*. Dalje, iz* 4) *i* 3) *paramodulacijom (za* $s = a$, $t = c$, $t' = c$*) dobijamo* 5) $f(a) \neq f(a)$*. Koristeći implicitnu klauzu refleksivnosti* $x = x$*, rezolucijom sa* 5) *dobijamo praznu klauzu.*

Pregled

Dedukcija i jednakost

Deduktivni sistemi za jednakost

- Svi deduktivni sistemi logike prvog reda (Hilbertov sistem, prirodna dedukcija,. . .) se mogu koristiti i u logici sa jednakošću
- Jednakost se tretira tako što koristimo aksiome jednakosti kao pretpostavke
- Alternativno, možemo aksiome jednakosti formulisati i kao dodatna pravila deduktivnog sistema

Pravila dedukcije za jednakost

Refleksivnost

$$\frac{}{u = u}\ \textit{refl}$$

Simetričnost

$$\frac{u = v}{v = u}\ \textit{sym}$$

Tranzitivnost

$$\frac{u = v \qquad v = w}{u = w}\ \textit{trans}$$

Kongruencija

$$\frac{t_1 = s_1 \qquad \dots \qquad t_n = s_n}{f(t_1, \dots, t_n) = f(s_1, \dots, s_n)}\ \textit{congF} \qquad \frac{t_1 = s_1 \qquad \dots \qquad t_n = s_n}{p(t_1, \dots, t_n) \Rightarrow p(s_1, \dots, s_n)}\ \textit{congP}$$

Pregled

Jednakosno rezonovanje

Teorija jednakosti sa neinterpretiranim funkcijskim simbolima

- U prethodnom razmatranju smo podrazumevali da signatura pored jednakosti sadrži i druge predikatske simbole
- Možemo se dalje ograničiti samo na signature koje ne sadrže druge predikatske simbole osim jednakosti
  - sa druge strane, signatura može sadržati funkcijske simbole koji se mogu interpretirati na proizvoljan način (tj. pretpostavljamo da važe samo aksiome jednakosti)
- ovakva logička teorija je poznata i kao teorija jednakosti sa neinterpretiranim funkcijskim simbolima (engl. Equality with Uninterpreted Functions (EUF))
  - jedini literali u formulama ove teorije su jednakosti i različitosti nad termovima koji su izgrađeni nad neinterpretiranim funkcijskim simbolima

Jednakosno rezonovanje

Postavka problema

Centralni problem koji ćemo posmatrati je sledeći:

$$\Delta \models s = t$$

gde je Δ skup univerzalno kvantifikovanih jednakosti, a $s = t$ je univerzalno kvantifikovana jednakost.

- Dakle, ispitujemo da li je neka jednakost logička posledica datog skupa jednakosti (podrazumevamo samo normalne interpretacije).
- Univerzalne kvantifikacije su obično implicitne
- Može se pokazati da se možemo ograničiti na slučajeve kada je jednakost $s = t$ bazna, što ne umanjuje opštost

Jednakosno rezonovanje

Stav

Problem $\Delta \models s = t$ u kome su sve promenljive koje se pojavljuju u $s = t$ implicitno univerzalno kvantifikovane ekvivalentan je problemu $\Delta \models s = t$ u kome se sve promenljive koje se pojavljuju u $s = t$ tretiraju kao konstante.

Dokaz

Pretpostavimo da jednakost $s = t$ sadrži promenljive $x_1, \ldots, x_n$ koje su implicitno univerzalno kvantifikovane. Problem $\Delta \models s = t$ je ekvivalentan problemu ispitivanja (ne)zadovoljivosti skupa formula $\Delta \cup \{\neg \forall x_1 \ldots x_n.\ s = t\}$. Negacijom univerzalnog kvantifikatora dobijamo egzistencijalni, pa skolemizacijom dobijamo ekvizadovoljiv skup $\Delta \cup \{s \neq t\}$ (gde se promenljive $x_1, \ldots, x_n$ nadalje tumače kao konstante). Otuda je gornji problem ekvivalentan problemu ispitivanja logičke posledice $\Delta \models s = t$, pri čemu je $s = t$ sada bazna jednakost.

Sintaksno-deduktivni sistemi za jednakost

Deduktivni sistemi u teoriji jednakosti

- Kako bismo automatizovali rešavanje prethodnog problema, možemo kao i u opštoj logici prvog reda, razmatrati deduktivne sisteme za jednakost
- Ovakvi deduktivni sistemi su jednostavniji od opštih deduktivnih sistema, jer ne moraju sadržati pravila za iskazne veznike, s obzirom na formu problema koji razmatramo
- Jedan takav sistem je Birkhofov sistem koji prikazujemo u nastavku

Sintaksno-deduktivni sistemi za jednakost — Birkhofova pravila

Birkhofova pravila

$$\frac{}{\Delta \vdash t = t}\ \text{refl}$$

$$\frac{\Delta \vdash s_1 = t_1 \quad \dots \quad \Delta \vdash s_n = t_n}{\Delta \vdash f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n)}\ \text{cong}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t}{\Delta \vdash t = s}\ \text{sym}$$

$$\frac{}{\Delta, s = t \vdash s = t}\ \text{ax}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t \quad \Delta \vdash t = u}{\Delta \vdash s = u}\ \text{trans}$$

$$\frac{\Delta \vdash s = t}{\Delta \vdash (s = t)[x \to a]}\ \text{inst}$$

Primer

Dokažimo da važi:

$$a = b, c = b \vdash f(a) = f(c)$$

Imamo sledeći dokaz u Birkhofovom sistemu:

$$\dfrac{\dfrac{}{a = b, c = b \vdash a = b}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{a = b, c = b \vdash c = b}\,ax}{a = b, c = b \vdash b = c}\,sym}{\dfrac{a = b, c = b \vdash a = c}{a = b, c = b \vdash f(a) = f(c)}\,cong}\,tran$$

Birkofova teorema

Teorema

$\Delta \models s = t$, tj. jednačina $s = t$ važi u svim normalnim modelima skupa jednačina Δ akko i samo ako $\Delta \vdash s = t$, tj. ako se $s = t$ može izvesti iz Δ primenom Birkofovih pravila.

Zamenski dokazi

Definicija

Neka je dat problem $E \vdash s = t$, gde je $s = t$ bazna jednakost. Pod zamenskim dokazom jednakosti $s = t$ iz E podrazumevamo lanac jednakosti $u_0 = u_1 = \ldots = u_n$, gde je $u_0 = s$, $u_n = t$, i važi da je $u_{i+1} = u_i[l_j \to r_j]$, gde je $l_j = r_j$ (ili $r_j = l_j$) bazna instanca neke jednakosti iz E.

Teorema

$E \vdash s = t$, tj. $s = t$ se može dokazati iz E u Birkhofovom sistemu akko postoji zamenski dokaz za $s = t$ iz E.

Zamenski dokazi

Primer

Dokažimo da važi

$$a = b, c = b \vdash f(a) = f(c)$$

Imamo sledeći zamenski dokaz: $f(a) = f(b) = f(c)$*, pri čemu smo najpre* a *zamenili sa* b *(na osnovu jednakosti* $a = b$*), a zatim smo* b *zamenili sa* c *(na osnovu jednakosti* $c = b$*).*

Pregled

Odlučivanje baznih jednakosti

Bazni fragment teorije EUF

- Prilikom primene Birkofovih pravila problem predstavlja pravilo instancijacije (nije jasno kako odlučiti koju instancijaciju $x \to t$ upotrebiti).
- Ukoliko su sve jednakosti bazne (nemaju slobodnih promenljivih), onda pravilo instancijacije nije potrebno koristiti, što čini ovaj fragment odlučivim.
- Procedure odlučivanja za bazne jednakosti se obično zasnivaju na kongruentnom zatvorenju.

Kongruentne relacije

Definicija

Neka je dat jezik $\mathcal{L}$ i skup termova D nad $\mathcal{L}$. Relacija $\sim$ je kongruencija na skupu D u odnosu na jezik $\mathcal{L}$ ako je relacija ekvivalencije na skupu D i saglasna je (kongruentna) sa svim funkcijskim simbolima jezika $\mathcal{L}$, tj. za svako f važi da ako $s_1 \sim t_1$, $\dots$, $s_n \sim t_n$, tada $f(s_1, \dots, s_n) \sim f(t_1, \dots, t_n)$.
Kongruentno zatvorenje relacije $\sim$ je najmanja kongruencija koja sadrži polaznu relaciju $\sim$.

Teorema o kongruentnom zatvorenju

Teorema

Neka su s_i, t_i, s *i* t *bazni termovi i neka je* D *skup svih ovih termova i svih njihovih podtermova. Neka je* $\sim$ *kongruentno zatvorenje relacije* $\{(s_1, t_1), \ldots, (s_n, t_n)\}$. *Tada*

$$\{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\} \models s = t$$

akko

$$\{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\} \vdash s = t$$

akko

$$s \sim t$$

Teorema o kongruentnom zatvorenju

Dokaz

Prva i druga stavka su ekvivalentne na osnovu Birkhofove teoreme. Iz druge stavke sledi treća . . . . Iz treće stavke sledi druga . . . .

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

Ideja algoritma

- Postupak se zasniva na postepenom proširenju relacije kongruencije počevši od prazne relacije i dodavanjem jedne po jedne jednakosti.
- Kongruencije se predstavljaju klasama ekvivalencije (korišćenjem *union-find* strukture).
- Prilikom spajanja klasa vrši se analiza termova u kojima elementi tih klasa učestvuju i na osnovu kongruentnosti spajaju se odgovarajući termovi. Ukoliko se npr. klase koje sadrže termovi s i t spajaju, a postoje npr. termovi $f(s, g(t))$ i $f(t, g(s))$, potrebno je spojiti i klase kojima oni pripadaju.

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

Oznake koje ćemo koristiti:

- Neka je $E = \{s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n\}$ skup baznih jednakosti. Neka je T skup termova zatvoren za podtermove koji sadrži sve bazne termove s_i, t_i (i možda još neke druge termove i njihove podtermove).
- Neka $use(t)$ označava skup svih termova skupa T čiji je podterm term t. Ovi skupovi se mogu unapred izračunati.
- Neka $find(t)$ vraća kanonskog predstavnika klase ekvivalencije kojoj pripada term t.
- Neka $union(s, t)$ spaja klasu ekvivalencije terma s i klasu ekvivalencije terma t.
- Neka $cong(s, t)$ označava da je s oblika $f(s_1, \dots, s_n)$ i t oblika $f(t_1, \dots, t_n)$ pri čemu je $find(s_i) = find(t_i)$.

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja

Algoritam Nelson-Open

```
function cc(E, T)
begin
   foreach t ∈ T  find(t) := t.
   foreach s_i = t_i ∈ E
      if(find(s_i) ≠ find(t_i))
         merge(s_i, t_i)
end


function merge(s, t)
begin
   T_s = ⋃{use(u) | find(u) = find(s)}
   T_t = ⋃{use(u) | find(u) = find(t)}
   union(s, t)
   foreach s' ∈ T_s, t' ∈ T_t
      if (find(s') ≠ find(t') ∧ cong(s', t'))
      merge(s', t')
end
```

Nelson-Openov algoritam za određivanje kongruentnog zatvorenja — primer

Primer

Ispitajmo da li važi: $x = y, y = z \models f(x) = f(z)$ *(gde su* x, y, z *konstante). Potrebno je odrediti kongruentno zatvorenje za skup jednakosti* $E = \{x = y, y = z\}$ *nad skupom termova* $T = \{x, y, z, f(x), f(z)\}$ *(dakle, svi termovi koji se pojavljuju u* E*, kao i u jednakosti* $f(x) = f(z)$ *koju dokazujemo).*
use je određen sa

$$\{x \mapsto \{f(x)\}, y \mapsto \{\}, z \mapsto \{f(z)\}, f(x) \mapsto \{\}, f(z) \mapsto \{\}\}$$

Krećemo od jednočlanih klasa $\{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}\}$*, tj. find je određen sa:*

$$\{x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$$

Primer

- *merge*(x, y) – $T_x = \{f(x)\}$, $T_y = \{\}$. *Nakon union*(x, y), *dobijaju se klase* $\{\{x, y\}, \{z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}$, *tj. find je određen sa* $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto z, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$. *Petlja je prazna.*
- *merge*(y, z) – $T_y = \{f(x)\}$, $T_z = \{f(z)\}$. *Nakon union*(y, z), *dobijaju se klase* $\{\{x, y, z\}, \{f(x)\}, \{f(z)\}$, *tj. find je određen sa* $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto x, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(z)\}$. $f(x)$ *i* $f(z)$ *su kongruentni pa se poziva:*
    - *merge*$(f(x), f(z))$ – $T_{f(x)} = \{\}$, $T_{f(z)} = \{\}$. *Nakon union*$(f(x), f(z))$ *dobijaju se klase* $\{\{x, y, z\}, \{f(x), f(z)\}$, *tj. find je određen sa* $\{x \mapsto x, y \mapsto x, z \mapsto x, f(x) \mapsto f(x), f(z) \mapsto f(x)\}$. *Petlja je prazna.*

Primer

Konačna relacija kongruentnog zatvorenja data je skupom klasa $\{\{x, y, z\}, \{f(x), f(z)\}\}$. *Kako su* $f(x)$ *i* $f(z)$ *u istoj klasi, to znači da je jednakost* $f(x) = f(z)$ *logička posledica skupa jednakosti* $x = y, y = z$, *tj. važi* $x = y, y = z \models f(x) = f(z)$.

Ispitivanje zadovoljivosti bazne EUF formule

Bazni fragment EUF teorije je odlučiv!

Neka je F proizvoljna bazna EUF formula (tj. formula bez promenljivih i kvantifikatora u kojoj su svi literali jednakosti i različitosti nad termovima koji sadrže neinterpretirane funkcijske simbole). Njenu zadovoljivost možemo ispitati na sledeći način:

- Formula F se najpre konvertuje u DNF, a zatim ispitujemo zadovoljivost svake od konjunkcija literala (čim jedna od njih bude zadovoljiva, prekidamo dalji postupak, jer je tada i cela formula zadovoljiva)
- Svaka od konjunkcija je oblika:

$$s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \wedge s'_1 \neq t'_1 \wedge \ldots s'_{n'} \neq t'_{n'}$$

- Određuje se kongruentno zatvorenje za skup jednakosti $E = \{s_1 = t_1, \ldots, s_n = t_n\}$ i skup termova T dobijen od $\{s_1, t_1, \ldots s_n, t_n, s'_1, t'_1, \ldots, s'_{n'}, t'_{n'}\}$ i svih njihovih podtermova.
- Konjunkcija je zadovoljiva akko je $find(s'_i) \neq find(t'_i)$, za svako $1 \leq i \leq n'$.

NAPOMENA: Ispitivanje valjanosti se svodi na ispitivanje (ne)zadovoljivosti negacije.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF

Problem valjanosti univerzalno kvantifikovanih EUF formula

- Razmatrajmo valjanost univerzalno kvantifikovane EUF formule, tj. formula oblika $\forall x_1 \dots x_n.\ P(x_1, \dots, x_n)$, gde je P EUF formula bez kvantifikatora
- Negacijom i skolemizacijom se dobija bazna formula oblika $P'(c_1, \dots, c_n)$.
- Sada se ispitivanje valjanosti polazne univerzalno kvantifikovane EUF formule svodi na ispitivanje zadovoljivosti bazne EUF formule, kao što je malopre opisano

Napomena

Primetimo da se problem zadovoljivosti univerzalno kvantifikovane EUF formule ne može svesti na zadovoljivost bazne formule, jer se u tom slučaju ne mogu ukloniti univerzalni kvantifikatori.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer

Primer

Pokažimo da formula

$$\forall x.\ f^3(x) = x \ \wedge \ f^5(x) = x \ \Rightarrow \ f^2(x) = x$$

važi u svim normalnim modelima, pri čemu je $f^i(x)$ *skraćeni zapis za* $f(f(\ldots f(x)))$*, gde se* f *primenjuje* i *puta. Negiranjem polazne formule i skolemizacijom dobija se formula*

$$f^3(c) = c \wedge f^5(c) = c \wedge f^2(c) \neq c.$$

Posmatrajmo izvršavanje Nelson-Oppen-ovog algoritma. Skup jednakosti $E = \{f^3(c) = c, f^5(c) = c\}$*, a skup termova* $T = \{c, f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}$.

Primer

Primer

- *merge*$(f^3(c), c)$ – $T_{f^3(c)} = \{f^4(c)\}$, $T_c = \{f(c)\}$. *Nakon izvršetka union*$(f^3(c), c)$ *dobijaju se klase* $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c)\}, \{f^2(c)\}, \{f^4(c)\}, \{f^5(c)\}\}$. $f^4(c)$ *i* $f(c)$ *su kongruentni pa se poziva:*
  - *merge*$(f^4(c), f(c))$ – $T_{f^4(c)} = \{f^5(c)\}$, $T_{f(c)} = \{f^2(c)\}$. *Nakon izvršetka union*$(f^4(c), f(c))$ *dobijaju se klase* $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}, \{f^2(c)\}, \{f^5(c)\}\}$. $f^5(c)$ *i* $f^2(c)$ *su kongruentni pa se poziva:*
    - *merge*$(f^5(c), f^2(c))$ – $T_{f^5(c)} = \{\}$, $T_{f^2(c)} = \{f^3(c)\}$. *Nakon izvršetka union*$(f^5(c), f^2(c)$ *dobijaju se klase* $\{\{c, f^3(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}, \{f^2(c), f^5(c)\}\}$. *Petlja je prazna.*

Primer

Primer

- *merge*$(f^5(c), c)$ — $T_{f^5(c)} = \{f^3(c)\}$, $T_c = \{f(c), f^4(c)\}$.
  Nakon union$(f^5(c), c)$ *dobijaju se klase*
  $\{\{c, f^2(c), f^3(c), f^5(c)\}, \{f(c), f^4(c)\}\}$.
  Termovi $f^3(c)$ *i* $f(c)$ *su kongruentni pa se poziva*
  - *merge*$(f^3(c), f(c))$ – $T_{f^3(c)} = \{f(c), f^3(c), f^4(c)\}$, $T_{f(c)} = \{f^2(c), f^5(c)\}$.
    Nakon union$(f^3(c), f(c)$ *dobijaju se klase*
    $\{\{c, f(c), f^2(c), f^3(c), f^4(c), f^5(c)\}\}$. *Svi termovi su istoj klasi pa nema daljih rekurzivnih poziva.*

  Svi termovi su istoj klasi pa nema daljih rekurzivnih poziva.

Odlučivanje univerzalnog fragmenta EUF – primer

Primer

Dakle, pošto negirana formula sadrži različitost $f^2(c) \neq f(c)$*, a na osnovu kongruentnog zatvorenja važi* $f^2(c) = f(c)$*, ona je nezadovoljiva, te polazna formula*

$$\forall x.\ f^3(x) = x \ \wedge\ f^5(x) = x \ \Rightarrow\ f^2(x) = x$$

važi u svim normalnim modelima.

Neodlučivost EUF teorije

Neodlučivost EUF teorije

- Videli smo da su problemi valjanosti i zadovoljivosti odlučivi za bazni fragment EUF teorije
- Takođe, problem valjanosti je odlučiv za univerzalno kvantifikovane EUF formule
- Sa druge strane, problem zadovoljivosti univerzalno kvantifikovanih EUF formula je neodlučiv
- Takodje, problemi zadovoljivosti i valjanosti za EUF formule u opštem obliku su neodlučivi

Pregled

Zamenski dokazi još jednom

Zamenski dokazi – podsetnik

- Dokazi tvrdjenja $E \vdash s = t$ se (neformalno) obično sprovode tako što što se započne od terma s, a onda se na njega (odnosno njegove podtermove) primenjuju transformacije na osnovu datih jednakosti $s_i = t_i \in E$, vršeći pri tom pogodne instancijacije.
- Ukoliko se takvim transformacijama polazeći od s može dobiti term t, tada zaključujemo da je $s = t$ posledica jednakosti iz E
- Ovakve dokaze nazivali smo zamenskim dokazima
- Problem zamenskih dokaza je to što ih je teško automatski konstruisati, zbog toga što je teško kontrolisati primenu zamena u termovima i usmeravati je ka pravom cilju

Prezapisivanje

Od zamenskih dokaza do prezapisivanja

- U praksi, kada ,,na papiru" primenjujemo zamenske dokaze, obično date ,,zakone" iz E primenjujemo na usmeren način, u cilju uprošćavanja polaznog terma
- Na primer, term $x \cdot x^{-1}$ se zamenjuje sa 1 — zamena u suprotnom smeru je obično neintuitivna, jer ne vodi ka uprošćavanju terma
- Otuda zakon $x \cdot x^{-1} = 1$ posmatramo kao ,,usmerenu jednakost" $x \cdot x^{-1} \to 1$, tj. kao pravilo po kome se vrši uprošćavanje
- Sada se tvrdjenje $E \vdash s = t$ dokazuje tako što se s i t uprošćavaju koristeći usmerene jednakosti iz E, sa ciljem da se svedu na isti term
- Korišćenje transformacija termova na osnovu usmerenih jednakosti naziva se prezapisivanje. Usmerene jednakosti nazivamo pravila prezapisivanja.

Usmeravanje jednakosti

Ali kako da usmerimo jednakosti?

- Postavlja se pitanje na koji način jednakosti $s_i = t_i \in E$ usmeriti i pretvoriti u pravila prezapisivanja?
- Za svaku jednakost $s_i = t_i$ imamo dve mogućnosti: $s_i \to t_i$ ili $t_i \to s_i$
- Jednakosti treba usmeriti tako da u nekom smislu desna strana bude jednostavnija od leve, kako bi se prezapisivanjem dobijali jednostavniji termovi
- Medjutim, pojam jednostavnijeg terma je suptilan. Na primer, $(x + y) \cdot (w + z)$ je kraći od $xw + xz + yw + yz$ ali se drugi smatra jednostavnijim jer omogućava dalja skraćivanja
- Otuda problem usmeravanja jednakosti nije ni malo trivijalan

Definicija

Pravilo prezapisivanja termova je usmerena jednakost oblika $l \rightarrow r$ gde su l i r termovi takvi da l nije promenljiva i r ne uvodi nove slobodne promenljive u odnosu na l (skup slobodnih promenljivih terma r je podskup skupa slobodnih promenljivih terma l).

Definicija

Ako je $l \rightarrow r$ pravilo prezapisivanja termova kažemo da se term t na osnovu ovog pravila prezapisuje u term t' ako postoji podterm terma t koji je instanca terma l, takav da se njegovom zamenom instancom terma r (pri istoj instancijaciji) dobija term t'.

Definicija

Sistem prezapisivanja R termova je skup pravila prezapisivanja termova. Kažemo da $t \rightarrow_R t'$ ako postoji neko pravilo $l \rightarrow r \in R$ kojim se t prezapisuje u t'. Relacija $\rightarrow_R$ je relacija prezapisivanja termova.

Primer primene prezapisivanja

Primer

Prezapisivanjem terma $(a + a) + (b + b)$ *na osnovu pravila* $x + x \to 2x$ *mogu se dobiti* $2a + (b + b)$ *i* $(a + a) + 2b$. *Term* $2a + 2b$ *se može dobiti nakon dva koraka.*

Prezapisivanje i Birkhofov sistem

Teorijski osnov prezapisivanja

- Prezapisivanje ima svoje teoretsko opravdanje (zasnovano na Birkhofovom sistemu).
- Svaki lanac prezapisivanja se može konvertovati u formalni dokaz u Birkhofovom sistemu.
- Važi i obratno.

Teorema

Ako je $\rightarrow_R$ relacija dobijena na osnovu sistema prezapisivanja R, a $\leftrightarrow_R^*$ njeno simetrično, refleksivno i tranzitivno zatvorenje, tada za svaka dva terma s i t važi $s \leftrightarrow_R^* t$ ako i samo ako $R \vdash s = t$.

Kanonski sistemi

Kanonski sistemi prezapisivanja

- U slučaju jednakosnog rezonovanja na osnovu datih jednakosti E, reći ćemo da su s i t ekvivalentni u odnosu na E, ako $E \vdash s = t$
- Da bi sistem za prezapisivanje bio efektivno upotrebljiv za automatizaciju dokazivanja ekvivalentnosti dva terma, poželjno je da ima dva veoma bitna svojstva:
  - svaki lanac prezapisivanja se mora završiti nakon konačno mnogo koraka, tj. mora se stići do terma na koji nije moguće dalje primeniti ni jedno pravilo — za ovakve termove kažemo da su u normalnoj formi
  - svaki term ima jedinstvenu normalnu formu
- Ova dva svojstva redom nazivamo zaustavljanje i konfluentnost
- Sistemi koji imaju ova dva svojstva se nazivaju kanonski ili konvergentni.
- Ovakvi sistemi se mogu koristiti kao procedure odlučivanja ekvivalentnosti dva terma s i t u odnosu na dati sistem jednakosti (proveri se da li se nakon „normalizacije" termova s i t dobija ista normalna forma).

Primer kanonskog sistema

Primer

$$\{m+0 = m, 0+n = n, m+S(n) = S(m+n), S(m)+n = S(m+n)\}$$

Utvrđivanje jednakosti dva terma na osnovu ovog sistema ne zahteva nikakvu kreativnost. Npr.

$$S(0) + S(S(0)) \to S(0 + S(S(0))) \to S(S(S(0)))$$

Takođe,

$$\begin{aligned} S(0) + S(S(0)) \quad \to \quad & S(S(0) + S(0)) \to S(S(S(0) + 0)) \to \\ & S(S(S(0+0))) \to S(S(S(0))) \end{aligned}$$

Naravno, efikasnost zavisi od redosleda primene pravila, međutim, normalna forma do koje će se stići ne zavisi.

Primeri ne-kanonskih sistema — nezaustavljanje

Primer

Neka je dato pravilo $x + y \to y + x$. *Term* $1 + 2$ *nema normalnu formu. Zaista, postoji izvođenje:*

$$1 + 2 \to 2 + 1 \to 1 + 2 \to 2 + 1 \to \dots$$

Ovaj sistem očigledno nema svojstvo zaustavljanja.

Primeri ne-kanonskih sistema — nekonfluentnost

Primer

$$\{x + 0 \to x, s(x + y) \to x + s(y)\}$$

Term $s(x+0)$ se primenom prvog pravila može prezapisati u $s(x)$, a primenom drugog pravila u $x + s(0)$. Nijedan od ova dva terma nije moguće dalje prezapisivati.
Dobijene normalne forme nisu jednake, pa ovaj sistem nema svojstvo konfluentnosti.

Primeri ne-kanonskih sistema — nekonfluentnost

Primer

$$\{x \cdot (y+z) \to x \cdot y + x \cdot z, (x+y) \cdot z \to x \cdot z + y \cdot z\}$$

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)\cdot(c+d) & \to & a\cdot(c+d) + b\cdot(c+d) \\
 & \to & (a\cdot c + a\cdot d) + b\cdot(c+d) \\
 & \to & (a\cdot c + a\cdot d) + (b\cdot c + b\cdot d)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
(a+b)\cdot(c+d) & \to & (a+b)\cdot c + (a+b)\cdot d \\
 & \to & (a\cdot c + b\cdot c) + (a+b)\cdot d \\
 & \to & (a\cdot c + b\cdot c) + (a\cdot d + b\cdot d)
\end{array}$$

Apstraktni sistemi za prezapisivanje

Apstraktni sistemi za prezapisivanje

- Najznačajni sistemi za prezapisivanje su sistemi za prezapisivanje termova.
- Ipak, ponekad se posmatraju opštiji sistemi, tzv. apstraktni sistemi za prezapisivanje.
- Relacija prezapisivanja R se posmatra na proizvoljnom skupu X (ne obavezno skupu termova) i obično se zapisuje infiksno $x \to y$. Ova relacija je apstraktno data i ne definiše se na osnovu skupa jednakosti termova.
- Oznaka $\to^+$ označava tranzitivno zatvorenje relacije $\to$, oznaka $\to^*$ njeno refleksivno i tranzitivno zatvorenje, dok oznaka $\leftrightarrow^*$ označava njeno simetrično, refleksivno i tranzitivno zatvorenje.

Zaustavljanje

Definicija

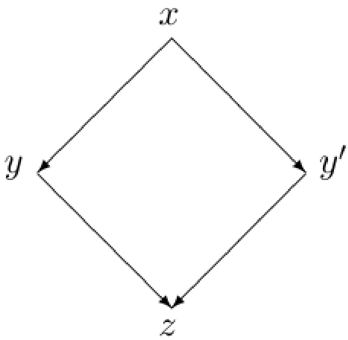
Relacija $\rightarrow$ *je zaustavljajuća (dobro zasnovana) ako ne postoji beskonačan lanac* $t_1 \rightarrow t_2 \rightarrow t_3 \rightarrow \ldots$.

Oblici konfluentnosti

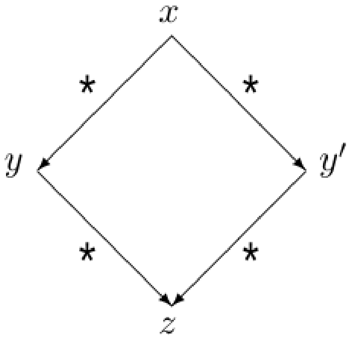
Definicija

- *Relacija $\rightarrow$ ima svojstvo dijamanta ako kada $x \rightarrow y$ i $x \rightarrow y'$ tada postoji z tako da $y \rightarrow z$ i $y' \rightarrow z$.*
- *x i y su spojivi što označavamo sa $x \downarrow y$ ako postoji z tako da $x \rightarrow^* z$ i $y \rightarrow^* z$.*
- *Relacija je konfluentna ako kada $x \rightarrow^* y$ i $x \rightarrow^* y'$ tada $y \downarrow y'$. Ekvivalentno, $\rightarrow^*$ ima svojstvo dijamanta.*
- *Relacija je slabo konfluentna ako kada $x \rightarrow y$ i $x \rightarrow y'$ tada $y \downarrow y'$.*
- *Relacija ima Čerč-Roserovo svojstvo ako kada god $x \leftrightarrow^* y$, tada je $x \downarrow y$.*

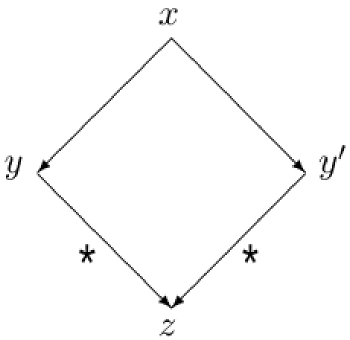
Svojstvo dijamanta



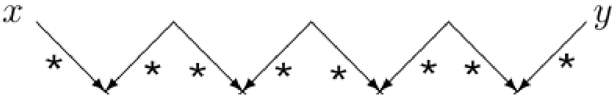
Konfluentnost



Slaba konfluentnost



Relacija $\leftrightarrow^*$

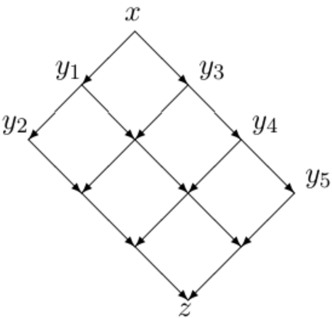


Oblici konfluentnosti

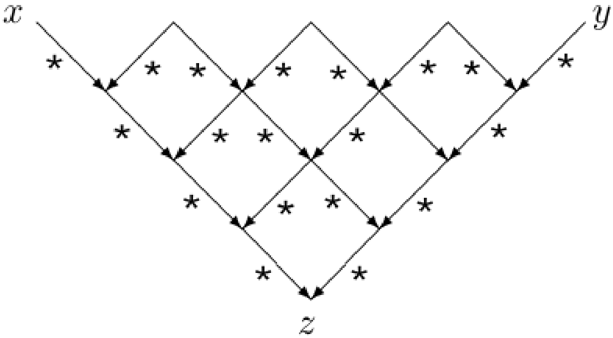
Stav

- *Ako je relacija konfluentna ona je slabo konfluentna.*
- *Ako relacija ima svojstvo dijamanta ona je konfluentna.*
- *Ako relacija ima svojstvo dijamanta ona je slabo konfluentna.*
- *Relacija ima Čerč Roserovo svojstvo akko je konfluentna.*

Svojstvo dijamanta povlači konfluentnost



Ekvivalentnost Čerč-Roserovog svojstva i konfluentnosti



Utvrđivanje konfluentnosti

Primedba

- U praksi je obično znatno lakše utvrditi slabu konfluentnost relacije od konfluentnosti
- Na žalost, slabo konfluentna relacija ne mora biti konfluentna.

Primer

Relacija $b \to a, b \to c, c \to b, c \to d$ je slabo konfluentna, ali nije konfluentna.

- Ipak, važi naredna teorema.

Teorema (Njuman)

Ako je relacija $\to$ zaustavljajuća i slabo konfluentna, ona je i konfluentna.

- Ove teorema se u praksi koristi za lakše dokazivanje konfluentnosti:
  - Dokaže se slaba konfluentnost (što je lakše)
  - Dokaže se zaustavljanje (koje i onako moramo dokazati da bismo imali efektivno primenjiv sistem prezapisivanja)

Jedinstvenost normalne forme i konfluentnost

Definicija

Element $x \in X$ nazivamo normalnom formom u odnosu na relaciju $\rightarrow$ ako ne postoji $y \in X$ takvo da je $x \rightarrow y$.
Ako je $x \rightarrow^* y$, gde je y normalna forma, tada kažemo da je y normalna forma elementa x.

Teorema

Ako je relacija $\rightarrow$ konfluentna tada svaki element ima najviše jednu normalnu formu.

Dokaz

Pretpostavimo suprotno: da postoje dve različite normalne forme y_1 i y_2 elementa $x \in X$. Kako je $x \rightarrow^* y_1$ i $x \rightarrow^* y_2$, tada bi, zbog konfluentnosti, moralo da važi $y_1 \downarrow y_2$, što ne važi jer su ova dva elementa normalne forme. Kontradikcija.

Posledica

Ako je relacija $\rightarrow$ konfluentna i zaustavljajuća, tada svaki element $x \in X$ ima jedinstvenu normalnu formu.

Spojivost i normalna forma

Teorema

Ako je relacija $\rightarrow$ konfluentna, tada ako za neka dva elementa važi $x \downarrow y$, tada ova dva elementa ili oba nemaju normalne forme, ili su im (jedinstvene) normalne forme jednake.

Dokaz

Iz $x \downarrow y$ sledi da postoji neki element z takav da $x \rightarrow^* z$ i $y \rightarrow^* z$. Ako, npr. x ima normalnu formu x', tada važi $x \rightarrow^* x'$, pa zbog konfluentnosti važi $x' \downarrow z$. Medjutim, kako je x' normalna forma, to znači da je $z \rightarrow^* x'$. Otuda je i $y \rightarrow^* x'$, pa je x' normalna forma i za y.

Normalne forme i relacija $\leftrightarrow^*$

Teorema

Neka je relacija $\rightarrow$ konfluentna i zaustavljajuća na skupu X. Tada za svaka dva elementa x i y važi $x \leftrightarrow^* y$ akko x i y imaju jednake normalne forme.

Dokaz

Iz konfluentnosti i zaustavljanja sledi da x i y imaju jedinstvene normalne forme. Iz konfluentnosti takođe sledi Čerč-Rozerovo svojstvo, tj. $x \leftrightarrow^* y$ akko $x \downarrow y$. Iz prethodne teoreme sledi da ovo važi akko su normalne forme od x i y jednake.

Ponovo o prezapisivanju termova

Teorema

Neka je dat skup jednakosti E i neka je orijentacijom ovih jednakosti dobijen sistem prezapisivanja termova R. Ako je relacija $\rightarrow_R$ konfluentna i zaustavljajuća, tada za baznu jednakost $s = t$ važi $E \models s = t$ akko termovi s i t imaju jednake normalne forme u odnosu na relaciju $\rightarrow_R$.

Dokaz

Teorema je direktna posledica prethodne teoreme za apstraktne sisteme prezapisivanja.

Primedba

Iz ove teoreme sledi da je samo potrebno ,,pametno" orijentisati jednakosti iz E tako da dobijeni sistem prezapisivanja bude konfluentan i zaustavljajući:

- u tom slučaju bismo samo prezapisali s i t do svojih normalnih formi (što možemo u konačnom broju koraka), a zatim ispitali da li su te dve normalne forme iste
- otuda bi problem $E \models s = t$ bio odlučiv

Ipak, ispostavlja se da nije lako utvrditi da li je moguće jednakosti iz E orijentisati na željeni način.

Ispitivanje zaustavljanja

Problem zaustavljanja

- Jedan od fundamentalnih problema je kako za dati sistem prezapisivanja termova utvrditi da li je zaustavljajući.
- Problem ispitivanja zaustavljanja je neodlučiv!
- Osnovni metod je pronalaženje dobro zasnovanog uređenja $\succ$ takvog da iz $t \rightarrow_R t'$ sledi da $t \succ t'$.
- Još je bolje posmatrati dobro-zasnovano $\succ$ uređenje takvo da za svako pravilo $l \rightarrow r$ važi $l \succ r$. Međutim, da bi se iz ovoga moglo garantovati zaustavljanje potrebno je da uređenje $\succ$ ima i dodatna svojstva data u sledećoj definiciji.

Uređenje svođenja

Definicija

Relacija $\succ$ je uređenje prezapisivanja ako je tranzitivno, irefleksivno i zatvoreno u odnosu na instancijacije i kongruencije, tj.

- *irefleksivno – Ni za jedan term t ne važi $t \succ t$,*
- *tranzitivno – Ako je $s \succ t$ i $t \succ u$, tada $s \succ u$.*
- *stabilno – Ako je $s \succ t$ tada je $s[x \to t'] \succ t[x \to t']$.*
- *monotono – Ako je $s \succ t$, tada* $f(u_1, \dots, u_{i-1}, s, u_{i+1}, \dots, u_n) \succ f(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_n)$.

Dobro zasnovana uređenja prezapisivanja nazivaju se uređenja svođenja.

Uređenja svođenja

Lema (Manna, Ness)

Ako je $\succ$ uređenje svođenja i za svako $l \to r \in R$ važi $l \succ r$, tada je $\to_R$ zaustavljajuća.

Dokaz

Dovoljno je dokazati da iz $s \to_R t$ sledi $s \succ t$ — pošto je $\succ$ dobro zasnovano tvrđenje sledi. Iz $s \to_R t$ sledi da postoji $l \to r \in R$ i instanca $\bar{l}$ terma l koja je podterm terma s, takva da kada se on zameni odgovarajućom instancom $\bar{r}$ terma r dobija se term t. Pošto je $l \succ r$, na osnovu svojstva stabilnosti važi da je $\bar{l} \succ \bar{r}$. Na osnovu uzastopne primene svojstva monotonosti dobija se i da je $s \succ t$.

Uređenja pojednostavljivanja

Definicija

Relacija $\succ$ je uređenje pojednostavljivanja ako je irefleksivno, tranzitivno, stabilno, monotono i ima sledeće svojstvo podtermova:

- *svojstvo podtermova* – $f(\ldots, t_i, \ldots) \succ t_i$.

Primedba

Uređenje pojednostavljivanja je specijalni tip uređenja prezapisivanja.

Stav (Deršovic)

Svako uređenje pojednostavljivanja je dobro uređenje te je i uređenje svođenja.

Napomena

Iz prethodnog stava sledi da je u praksi dovoljno naša pravila prezapisivanja ,,utopiti'' u neki poredak pojednostavljivanja. Jedan takav pristup prikazujemo u nastavku.

Definicija

Neka je data signatura $\mathcal{L}$, i neka je $\succ$ (strogo i potpuno) uređenje skupa funkcijskih simbola Σ. Uređenje leksikografkse staze (lexicographic path ordering (LPO)) $\succ_{lpo}$ se definiše rekurzivno sledećim skupom pravila:

1. $$\frac{v \in Vars(t) \quad t \neq v}{t \succ_{lpo} v}$$
2. $$\frac{}{t \succeq_{lpo} t} \;,\; \frac{s \succ_{lpo} t}{s \succeq_{lpo} t}$$
3. $$\frac{\exists i.\ s_i \succeq_{lpo} t}{f(s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo} t}$$
4. $$\frac{f \succ g, \quad \forall i.\ f(s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo} t_i}{f(s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo} g(t_1, \ldots, t_n)}$$
5. $$\frac{\forall i.\ f(s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo} t_i, \quad (s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo}^{lex} (t_1, \ldots, t_m)}{f(s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo} f(t_1, \ldots, t_m)}$$

NAPOMENA: Oznaka $s \succeq_{lpo} t$ znači $s \succ_{lpo} t \vee s = t$, a $\succ_{lpo}^{lex}$ označava leksikografsko poređenje torki.

Uređenje leksikografske staze

Primer

Da bismo razjasnili neophodnost dodatnog uslova $\forall i.\ f(s_1, \ldots, s_m) \succ_{lpo} t_i$ *u pravilima 4 i 5, posmatrajmo sledeći primer: pretpostavimo da imamo poredak* $g \succ f \succ h$ *među funkcijskim simbolima, gde su* f *i* g *arnosti 1, a* h *arnosti 2. Ako ne bismo imali ovaj dodatni uslov u pravilu 4, tada bismo ovim pravilom mogli da zaključimo da je* $g(x) \succ_{lpo} f(g(x))$ *(jer je* $g \succ f$ *pa bi bez dodatnog uslova to bilo dovoljno). Dalje bismo mogli da zaključimo da je* $f(g(x)) \succ_{lpo} g(x)$ *na osnovu pravila 3. Kako imamo* $g(x) \succ_{lpo} f(g(x)) \succ_{lpo} g(x)$, *sledi da relacija* $\succ_{lpo}$ *ne može biti istovremeno i tranzitivna i irefleksivna, kao što bi trebalo da bude.*
Slično, ako ne bismo imali dodatni uslov u pravilu 5, tada bismo mogli da izvedemo $h(g(x), x) \succ_{lpo} h(x, h(g(x), x))$, *jer je* $g(x) \succ_{lpo} x$, *pa bi bez dodatnog uslova to bilo dovoljno. Međutim, na osnovu pravila 3 važi* $h(x, h(g(x), x)) \succ_{lpo} h(g(x), x)$, *pa imamo* $h(g(x), x) \succ_{lpo} h(x, h(g(x), x)) \succ_{lpo} h(g(x), x)$, *odakle imamo isti zaključak kao i malopre.*

Uređenje leksikografske staze

Stav

Svako uređenje leksikografske staze je uređenje pojednostavljivanja, pa samim tim i uređenje svođenja.

Uređenje leksikografske staze – primeri

Primer

Korišćenjem uređenja leksikografske staze pokažimo da je zaustavljajući sistem

$$
\begin{aligned}
x + 0 &\to x \\
-0 &\to 0 \\
-(x + y) &\to (-x) + (-y)
\end{aligned}
$$

Neka je uređenje simbola $- \succ + \succ 0$.

Primer

Tada je:

- $x + 0 \succ_{lpo} x$ *na osnovu pravila 1. jer je* $x \in Vars(x + 0)$
- $-0 \succ_{lpo} 0$ *na osnovu 3. jer je na osnovu 2.* $0 \succeq_{lpo} 0$
- $-(x + y) \succ_{lpo} (-x) + (-y)$ *na osnovu pravila 4. jer je* $- \succ +$ *i pošto je, kao prvo,* $-(x + y) \succeq_{lpo} -x$ *i pošto je, kao drugo,* $-(x + y) \succeq_{lpo} -y$. *Prvo zaista važi na osnovu pravila 5. ukoliko je* $x + y \succ_{lpo}^{lex} x$ *a ovo je ispunjeno jer je* $x + y \succ_{lpo} x$ *na osnovu pravila 1. Na isti način se pokazuje i drugi uslov.*

Uređenje leksikografske staze – primeri

Primer

Zaustavljanje pravila

$$(x \cdot y) \cdot z \rightarrow x \cdot (y \cdot z)$$

se može pokazati uređenjem leksikografske staze. Zaista na osnovu pravila 5. treba pokazati da je $(x \cdot y, z) \succ_{lpo}^{lex} (x, y \cdot z)$ *što je ispunjeno jer je* $x \cdot y \succ_{lpo} x$ *na osnovu pravila 1.*
Dodatno, treba pokazati i da je term $(x \cdot y) \cdot z$ *veći ili jednak od neposrednih podtermova terma* $x \cdot (y \cdot z)$*, a to su* x *i* $y \cdot z$*. Prvo je trivijalno na osnovu pravila 1, a drugo se dokazuje slično primenom pravila 5.*

Zaustavljanje - zaključci

Zaključci

- LPO uređenje je jednoznačno određeno zadatim poretkom $\succ$ funkcijskih simbola iz signature $\mathcal{L}$
- Za fiksiranu signaturu sa konačnim brojem funkcijskih simbola imamo konačno mnogo LPO uređenja
- Ipak, ne mogu se sva uređenja svođenja dobiti na ovakav način, niti je svaka zaustavljajuća relacija prezapisivanja podskup nekog uređenja svođenja
- Otuda, čak i ako pravila prezapisivanja nisu ,,usmerena" u skladu sa nekim od LPO uređenja datog jezika, to i dalje ne znači da sistem prezapisivanja termova nije zaustavljajući
- Ovo je u skladu sa ranije navedenom činjenicom o neodlučivosti pitanja zaustavljanja

Ispitivanje konfluentnosti

Pitanje konfluentnosti je takođe neodlučivo!

- Problem ispitivanja konfluentnosti datog sistema prazapisivanja termova je u opštem slučaju neodlučiv.
- Ipak, postoje specijalni slučajevi koji su odlučivi:

Stav

- *Pitanje konfluentnosti baznih sistema za prezapisivanje je odlučivo.*
- *Pitanje konfluentnosti zaustavljajućih sistema za prezapisivanje je odlučivo.*

- Naglasimo da zaustavljanje nije neophodno za konfluentnost:

Primer

Sistem $R = \{a \rightarrow b, b \rightarrow a, a \rightarrow c\}$ *je konfluentan, ali nije zaustavljajući.*

Kritični parovi

Definicija (Kritični par)

Neka su $l_1 \rightarrow r_1$ i $l_2 \rightarrow r_2$ dva pravila koja nemaju zajedničkih promenljivih (ovo se može uvek postići preimenovanjem). Neka je l_1' podterm terma l_1 koji nije promenljiva i neka je θ najopštiji unifikator termova l_1' i l_2. Tada za ova dva pravila prezapisivanja definišemo ***kritični par*** $\langle r_1\theta, (l_1[l_1' \rightarrow r_2])\theta\rangle$.

Primer

Neka je $l_1 \rightarrow r_1 \equiv s(x+y) \rightarrow x + s(y)$, a $l_2 \rightarrow r_2 \equiv x + 0 \rightarrow x$. Podterm $l_1' \equiv x + y$ se može unifikovati sa $x + 0$ unifikatorom $\theta = \{y \mapsto 0\}$. Otuda imamo kritični par $\langle x + s(0), s(x)\rangle$.

Knut-Bendiksova teorema

Teorema

Sistem za prezapisivanje je lokalno konfluentan ako i samo ako su mu svi kritični parovi spojivi tj. ako važi $u_1 \downarrow u_2$*, za svaki kritični par* $\langle u_1, u_2 \rangle$

Napomena

Iz ove teoreme sledi da se ispitivanje lokalne konfluentnosti može svesti na ispitivanje spojivosti kritičnih parova (kojih ima konačno mnogo za dati (konačni) skup pravila prezapisivanja).

Provera kritičnih parova i ispitivanje konfluentnosti

Ideja postupka odlučivanja za zaustavljajuće sisteme prezapisivanja

- Da bi se otkrili svi kritični parovi datog sistema za prezapisivanje, svako pravilo se kombinuje sa svakim drugim (uključujući i svoju preimenovanu verziju).
- Pošto u slučaju konačnog sistema za prezapisivanje termova kritičnih parova ima konačno mnogo, da bismo utvrdili da li je sistem lokalno konfluentan, dovoljno je ispitati spojivost konačno mnogo parova termova.
- U slučaju zaustavljajućeg sistema, spojivost kritičnih parova se efektivno može ispitati (dovoljno je termove prezapisati do (nekih) svojih normalnih formi i utvrditi da li su one iste)
- Takodje, usled zaustavljanja, po Njumanovoj lemi važi da je sistem lokalno konfluentan akko je konfluentan.
- Ovo nam daje proceduru odlučivanja za pitanje konfluentnosti konačnih, zaustavljajućih sistema za prezapisivanje termova.

Knut-Bendiksova procedura upotpunjavanja

Upotpunjavanje do konfluentnosti

- Iako se ispitivanjem kritičnih parova ponekad ustanovi da određeni sistem za prezapisivanje termova R nije konfluentan, u nekim slučajevima se, dodavanjem određenih pravila, sistem može učiniti konfluentnim.
- Neka je $\langle u_1, u_2 \rangle$ kritični par za koji postoje različite normalne forme $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ termova u_1 i u_2.
- Jednakost $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ je posledica sistema R jer je $\bar{u}_1 \overset{*}{\leftrightarrow}_R \bar{u}_2$ i zbog toga dodavanje pravila $\bar{u}_1 \rightarrow \bar{u}_2$ ili $\bar{u}_2 \rightarrow \bar{u}_1$ ne menja odgovarajuću jednakosnu teoriju.
- U ovom proširenom sistemu, par $\langle u_1, u_2 \rangle$ postaje spojiv.
- Da bi sistem ostao zaustavljajući, potrebno je da je $\bar{u}_1 \succ \bar{u}_2$ ili $\bar{u}_2 \succ \bar{u}_1$ u odgovarajućem uređenju svođenja $\succ$.

Knut-Bendiksova procedura upotpunjavanja

Algoritam

Ulaz: skup jednakosti E i relacija svođenja $>$
Izlaz: konfluentan skup pravila prezapisivanja R ili *fail*

if ($\exists(s = t) \in E.\ s \neq t \wedge s \not> t \wedge t \not> s$)
    return fail;
$R_0 = \{l \to r \mid (l = r) \in E \cup E^{-1} \wedge l > r\}$
do
    $R_{i+1} = R_i$
    forall ($\langle u_1, u_2 \rangle \in CP(R_i)$)
        $\bar{u}_1 = u_1\downarrow$; $\bar{u}_2 = u_2\downarrow$;
        if ($\bar{u}_1 \neq \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_1 \not> \bar{u}_2 \wedge \bar{u}_2 \not> \bar{u}_1$)
            return fail;
        if ($\bar{u}_1 > \bar{u}_2$)
            $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\bar{u}_1 \to \bar{u}_2\}$
        else if ($\bar{u}_2 > \bar{u}_1$)
            $R_{i+1} = R_{i+1} \cup \{\bar{u}_2 \to \bar{u}_1\}$
    i := i+1;
while ($R_i \neq R_{i-1}$);
return R_i;

Konfluentnost – zaključci

Zaključi o Knut-Bendiksovoj proceduri i konfluentnosti

- Knut-Bendiksova procedura može da nam kao rezultat vrati dopunjeni konfluentan sistem prezapisivanja ekvivalentan sa polaznim (u smislu dobijene jednakosne teorije)
- Alternativno, Knut-Bendiksova procedura može reći da takav sistem ne postoji (pod pretpostavkom fiksiranog uređenja svođenja)
- Najzad, Knut-Bendiksova procedura može da se nikada ne zaustavi
- Otuda, mi ne možemo Knut-Bendiksovu proceduru koristiti kao proceduru odlučivanja za pitanje ,,da li se dati zaustavljajući sistem prezapisivanja može dopuniti do konfluentnog?"
- I ovo pitanje je u opštem slučaju neodlučivo