

**Zadatak.** Predstaviti 4-bitni potpuni sabirač iskaznom formulom. Zatim pomoću SAT rešavača odrediti razliku dva 4-bitna broja.

**Rešenje.** Neka su brojevi koje sabiramo  $x$  i  $y$ , i neka je njihov zbir  $z$ . Tada se broj  $x$  može predstaviti iskaznim varijablama  $x_0, x_1, x_2, x_3$  koje odgovaraju binarnim ciframa (počev od cifre najmanje težine). Slično, broj  $y$  se predstavlja iskaznim varijablama  $y_0, y_1, y_2, y_3$ , a  $z$  varijablama  $z_0, z_1, z_2, z_3$ . Prvi zadatak je izraziti varijable  $z_i$  preko varijabli  $x_i$  i  $y_i$ :

$$\begin{aligned} z_0 &\Leftrightarrow (x_0 \wedge \neg y_0) \vee (\neg x_0 \wedge y_0) \\ p_0 &\Leftrightarrow (x_0 \wedge y_0) \\ z_1 &\Leftrightarrow (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge \neg p_0) \vee (\neg x_1 \wedge y_1 \wedge \neg p_0) \vee (\neg x_1 \wedge \neg y_1 \wedge p_0) \vee (x_1 \wedge y_1 \wedge p_0) \\ p_1 &\Leftrightarrow (x_1 \wedge y_1 \wedge \neg p_0) \vee (x_1 \wedge \neg y_1 \wedge p_0) \vee (\neg x_1 \wedge y_1 \wedge p_0) \vee (\neg x_1 \wedge \neg y_1 \wedge p_0) \\ z_2 &\Leftrightarrow (x_2 \wedge \neg y_2 \wedge \neg p_1) \vee (\neg x_2 \wedge y_2 \wedge \neg p_1) \vee (\neg x_2 \wedge \neg y_2 \wedge p_1) \vee (x_2 \wedge y_2 \wedge p_1) \\ p_2 &\Leftrightarrow (x_2 \wedge y_2 \wedge \neg p_1) \vee (x_2 \wedge \neg y_2 \wedge p_1) \vee (\neg x_2 \wedge y_2 \wedge p_1) \vee (\neg x_2 \wedge \neg y_2 \wedge p_1) \\ z_3 &\Leftrightarrow (x_3 \wedge \neg y_3 \wedge \neg p_2) \vee (\neg x_3 \wedge y_3 \wedge \neg p_2) \vee (\neg x_3 \wedge \neg y_3 \wedge p_2) \vee (x_3 \wedge y_3 \wedge p_2) \\ p_3 &\Leftrightarrow (x_3 \wedge y_3 \wedge \neg p_2) \vee (x_3 \wedge \neg y_3 \wedge p_2) \vee (\neg x_3 \wedge y_3 \wedge p_2) \vee (\neg x_3 \wedge \neg y_3 \wedge p_2) \end{aligned}$$

gde su sa  $p_0, p_1, p_2, p_3$  označeni redom prenos sa pozicija 0, 1, 2, 3. Tranformacijom gornjih definicija u CNF, dobijamo:

$$\begin{array}{lll} (\neg z_0 \vee x_0 \vee y_0) & \wedge & (\neg z_0 \vee \neg x_0 \vee \neg y_0) \quad \wedge \\ (z_0 \vee \neg x_0 \vee y_0) & \wedge & (z_0 \vee x_0 \vee \neg y_0) \quad \wedge \\ (\neg p_0 \vee x_0) & \wedge & (\neg p_0 \vee y_0) \quad \wedge \\ (p_0 \vee \neg x_0 \vee \neg y_0) & \wedge & \\ (\neg z_1 \vee x_1 \vee y_1 \vee p_0) & \wedge & (\neg z_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_1 \vee p_0) \quad \wedge \\ (\neg z_1 \vee x_1 \vee \neg y_1 \vee \neg p_0) & \wedge & (\neg z_1 \vee \neg x_1 \vee y_1 \vee \neg p_0) \quad \wedge \\ (z_1 \vee \neg x_1 \vee y_1 \vee p_0) & \wedge & (z_1 \vee x_1 \vee \neg y_1 \vee p_0) \quad \wedge \\ (z_1 \vee x_1 \vee y_1 \vee \neg p_0) & \wedge & (z_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_1 \vee \neg p_0) \quad \wedge \\ (\neg p_1 \vee x_1 \vee y_1) & \wedge & (\neg p_1 \vee x_1 \vee p_0) \quad \wedge \\ (\neg p_1 \vee y_1 \vee p_0) & \wedge & (p_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_1 \vee p_0) \quad \wedge \\ (p_1 \vee \neg x_1 \vee y_1 \vee \neg p_0) & \wedge & (p_1 \vee x_1 \vee \neg y_1 \vee \neg p_0) \quad \wedge \\ (p_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_1 \vee \neg p_0) & \wedge & \\ (\neg z_2 \vee x_2 \vee y_2 \vee p_1) & \wedge & (\neg z_2 \vee \neg x_2 \vee \neg y_2 \vee p_1) \quad \wedge \\ (\neg z_2 \vee x_2 \vee \neg y_2 \vee \neg p_1) & \wedge & (\neg z_2 \vee \neg x_2 \vee y_2 \vee \neg p_1) \quad \wedge \\ (z_2 \vee \neg x_2 \vee y_2 \vee p_1) & \wedge & (z_2 \vee x_2 \vee \neg y_2 \vee p_1) \quad \wedge \\ (z_2 \vee x_2 \vee y_2 \vee \neg p_1) & \wedge & (z_2 \vee \neg x_2 \vee \neg y_2 \vee \neg p_1) \quad \wedge \\ (\neg p_2 \vee x_2 \vee y_2) & \wedge & (\neg p_2 \vee x_2 \vee p_1) \quad \wedge \\ (\neg p_2 \vee y_2 \vee p_1) & \wedge & (p_2 \vee \neg x_2 \vee \neg y_2 \vee p_1) \quad \wedge \\ (p_2 \vee \neg x_2 \vee y_2 \vee \neg p_1) & \wedge & (p_2 \vee x_2 \vee \neg y_2 \vee \neg p_1) \quad \wedge \\ (p_2 \vee \neg x_2 \vee \neg y_2 \vee \neg p_1) & \wedge & \\ (\neg z_3 \vee x_3 \vee y_3 \vee p_2) & \wedge & (\neg z_3 \vee \neg x_3 \vee \neg y_3 \vee p_2) \quad \wedge \\ (\neg z_3 \vee x_3 \vee \neg y_3 \vee \neg p_2) & \wedge & (\neg z_3 \vee \neg x_3 \vee y_3 \vee \neg p_2) \quad \wedge \\ (z_3 \vee \neg x_3 \vee y_3 \vee p_2) & \wedge & (z_3 \vee x_3 \vee \neg y_3 \vee p_2) \quad \wedge \\ (z_3 \vee x_3 \vee y_3 \vee \neg p_2) & \wedge & (z_3 \vee \neg x_3 \vee \neg y_3 \vee \neg p_2) \quad \wedge \\ (\neg p_3 \vee x_3 \vee y_3) & \wedge & (\neg p_3 \vee x_3 \vee p_2) \quad \wedge \\ (\neg p_3 \vee y_3 \vee p_2) & \wedge & (p_3 \vee \neg x_3 \vee \neg y_3 \vee p_2) \quad \wedge \\ (p_3 \vee \neg x_3 \vee y_3 \vee \neg p_2) & \wedge & (p_3 \vee x_3 \vee \neg y_3 \vee \neg p_2) \quad \wedge \\ (p_3 \vee \neg x_3 \vee \neg y_3 \vee \neg p_2) & \wedge & \end{array}$$

Razlika dva četvorobitna cela broja se sada može izračunati na sledeći način: pretpostavimo da su nam date cifre zbira ( $z_0, z_1, z_2, z_3$ ) kao i cifre jednog od

sabiraka (npr.  $y_0, y_1, y_2, y_3$ ), tada je potrebno odrediti cifre drugog sabirka (tj. razlike  $x = z - y$ ), odnosno cifre  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . Ovo se može lako uraditi tako što na gornju formulu dodamo još jedinične klauze kojima definišemo vrednosti datih cifara. Npr. ako je  $z = 1010$  a  $y = 0100$  tada je potrebno dodati konjukciju jediničnih klauza  $z_3 \wedge \neg z_2 \wedge z_1 \wedge \neg z_0 \wedge \neg y_3 \wedge y_2 \wedge \neg y_1 \wedge \neg y_0$ , a zatim dobijenu formulu propustiti kroz SAT rešavač. Rezultujući model biće:  $\neg x_0, x_1, x_2, \neg p_3, p_2, \neg p_1, \neg p_0$ , što daje rezultat  $x = 0110$ , kao što je i očekivano. Činjenica da je vrednost varijable  $p_3$  jednaka 0 znači da nije došlo do prenosa na poslednjoj poziciji, tj. nema prekoračenja.