PRIMERI ISPITNIH PITANJA I ZADATAKA – UTR – 2025/26

Sintaksa i semantika iskazne logike i logike prvog reda

1. Koja je osnovna razlika između *sintakse* i *semantike* u logici?
2. Ako je iskazna formula tačna za svaku valuaciju, za tu formulu kažemo da je:
   (a) zadovoljiva
   (b) tautologija (valjana formula)
   (c) kontradikcija
3. Da li formula $(A \Rightarrow B) \wedge \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$ ima model u iskaznoj logici?
   (a) Da
   (b) Ne
4. Kada za skup iskaznih formula F kažemo da je *zadovoljiv*?
5. Šta čini *signaturu* (ili jezik) logike prvog reda?
6. Za šta koristimo funkcijske, a za šta predikatske simbole u sintaksi logike prvog reda?
7. Koja je razlika između *terma* i *formule* u logici prvog reda? Kako se interpretiraju termovi, a kako formule?
8. Posmatrajmo formulu $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(y)) \wedge R(x)$. Koje su promenljive u ovoj formuli slobodne, a koje vezane?
9. Šta je to *zatvorena formula* (ili rečenica) u logici prvog reda?
10. Šta znači da je struktura M *model* formule A prvog reda?
11. Ako je formula A logička posledica skupa formula Γ, to znači da:
    (a) Postoji bar jedan model skupa Γ u kome je formula A netačna.
    (b) Svaki model skupa Γ je ujedno i model formule A.
    (c) Formula A je tačna samo ako su sve formule u Γ netačne.
12. Kako glasi Teorema o kompaktnosti za iskaznu logiku?
13. Ako za formulu A važi da je $\models A$, šta je sa njenom negacijom $\neg A$?
    (a) Ona je takođe valjana.
    (b) Ona je nezadovoljiva (kontradikcija).
    (c) Ona je zadovoljiva, ali nije valjana.
14. Izraziti formulu $\exists x.P(x)$ na logički ekvivalentan način pomoću univerzalnog kvantifikatora.
15. Data je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \vee r)$. Odredite istinitosnu vrednost formule A u valuaciji v za koju važi: $v(p) = 1$, $v(q) = 0$, $v(r) = 1$.
16. Da li je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$ zadovoljiva? Obrazložiti.
17. Neka je data formula prvog reda $\exists y.x < y$. Izvršiti zamenu $[x \mapsto f(y)]$ u ovoj formuli.
18. Rečenica logike prvog reda $\forall x.\exists y.P(x, y)$ je tačna u strukturi M ako i samo ako:
    (a) Postoji jedan element y iz domena koji je u relaciji sa svim elementima x.
    (b) Za svaki izabrani element x iz domena možemo pronaći (makar jedan) element y tako da važi $P(x, y)$.

(c) Za svaka dva elementa x i y važi $P(x, y)$.

19. Posmatrajmo strukturu $M = (\mathbb{N}, <)$ gde je domen skup prirodnih brojeva, a $<$ standardna relacija manje od. Da li je u ovoj strukturi tačna rečenica $\forall x.\exists y.x < y$? Ukratko obrazložite.
20. Data je formula $\forall x.\forall y.P(x, y) \Rightarrow P(y, x)$. Konstruišite jednostavnu strukturu M (odredite domen i relaciju P^M) koja služi kao *kontraprimer* za ovu formulu (tj. u kojoj je formula A netačna).
21. Ako znamo da za neke formule A, B, C važi $A, B \models C$, koja od sledećih tvrdnji je *tačna*?
    (a) Formula $A \wedge B \wedge C$ je tautologija.
    (b) Formula $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ je valjana (tačna u svakoj strukturi).
    (c) Formula $C \Rightarrow (A \vee B)$ je nezadovoljiva.
22. Pretpostavimo da imamo beskonačan skup iskaznih formula Γ takav da za svaki njegov konačan podskup postoji bar jedan model. Šta nam Teorema o kompaktnosti garantuje za ceo skup Γ?
23. Kako se formalno definiše pojam *valjane formule* ($\models A$) u logici prvog reda?
24. Da li je formula $\exists x.P(x) \vee Q(x)$ logički ekvivalentna formuli $(\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$?
    (a) Da
    (b) Ne
25. Koja od sledećih formula *nije* valjana u logici prvog reda?
    (a) $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow ((\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)))$
    (b) $\exists x.P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow ((\exists x.P(x)) \wedge (\exists x Q(x)))$
    (c) $(\forall x.P(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x))$
26. Neka je struktura $M = (\mathbb{Z}, f)$ gde je domen skup celih brojeva, a $f^M(x) = x + 1$ (funkcija sledbenika). Ako je valuacija $v(x) = 5$, odredite vrednost terma $f(f(x))$ u toj interpretaciji.
27. Ako su dve strukture M_1 i M_2 iste signature *izomorfne*, šta to znači za istinitost rečenica (zatvorenih formula) u tim strukturama?
28. Ako je skup formula $\Gamma \cup \{\neg A\}$ nezadovoljiv, šta na osnovu toga možemo zaključiti o odnosu skupa Γ i formule A?
    (a) $\Gamma \models A$.
    (b) Skup Γ je prazan.
    (c) Formula A je kontradikcija.
29. Da li je iskazna formula $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ tautologija?
    (a) Da
    (b) Ne
30. Objasnite zašto se istinitost formule u datoj strukturi M mora definisati u odnosu na valuaciju v ako formula sadrži slobodne promenljive, dok za zatvorene formule (rečenice) valuacija uopšte nije potrebna.
31. Da li su iskazne formule $p \Rightarrow q$ i $\neg p \Rightarrow \neg q$ logički ekvivalentne? Obrazložiti.
32. Kako se veznik implikacije ($p \Rightarrow q$) može izraziti koristeći isključivo negaciju i konjunkciju?

Izračunljivost

1. Kako glasi Čerčova teza?
2. Šta podrazumevamo pod inutitivnim pojmom algoritma? Koje karakteristike neki postupak treba da ima da bismo ga smatrali algoritmom u intuitivnom smislu?
3. Navesti bar tri načina za formalno opisivanje izračunljivih funkcija.
4. Koje od sledećih instrukcija spadaju u bazični skup instrukcija URM mašine? (Zaokružiti sve tačne odgovore)
   (a) Instrukcija nule $Z(n)$
   (b) Instrukcija sledbenika $S(n)$
   (c) Instrukcija sabiranja $A(m, n)$
   (d) Instrukcija prenosa $T(m, n)$
   (e) Instrukcija uslovnog skoka $J(m, n, q)$
   (f) Instrukcija bezuslovnog skoka $U(q)$
5. Ako je početno stanje registara URM mašine $R_1 = 5$, $R_2 = 3$, a svi ostali registri su nule, koja će vrednost biti u registru R_1 nakon izvršenja instrukcije $T(2, 1)$?
6. Da li URM instrukcija skoka $J(m, n, q)$ menja sadržaj registara R_m ili R_n?
   (a) Da
   (b) Ne
7. Šta znači da se URM program P *zaustavlja* za date početne vrednosti registara? Koji uslov treba da bude ispunjen da bi URM program zaustavio svoj rad?
8. Ako URM program pokušava da izvrši instrukciju skoka $J(m, n, q)$ gde je q broj koji je strogo veći od ukupnog broja instrukcija u programu, šta se dešava?
   (a) Program ulazi u beskonačnu petlju.
   (b) Program prijavljuje grešku u izvršavanju (runtime error).
   (c) Program se zaustavlja.
   (d) Program automatski skače na prvu instrukciju (resetuje se).
9. Da li svaka izračunljiva funkcija mora biti totalna? Odgovor obrazložiti.
10. Napišite URM program koji vrši rotaciju vrednosti u registrima R_1, R_2 i R_3 (tj. premešta $R_1 \to R_2 \to R_3 \to R_1$).
11. Da li je klasa primitivno rekurzivnih funkcija podskup klase URM-izračunljivih funkcija? Odgovor obrazložiti.
12. Koja operacija (operator) omogućava uvođenje beskonačnih petlji i ne-totalnosti pri definisanju μ-rekurzivnih funkcija?
13. Šta od navedenog predstavlja funkciju sledbenika $S(x)$?
   (a) $S(x) = x - 1$
   (b) $S(x) = x + 1$
   (c) $S(x) = 2x$
   (d) $S(x) = 0$
14. Da li su funkcije projekcije $P_k^i(x_1, x_2, \ldots, x_k) = x_i$ primitivno rekurzivne funkcije?
   (a) Da
   (b) Ne

15. Definišite operaciju *supstitucije* (kompozicije) funkcija u kontekstu izgradnje rekurzivnih funkcija.

16. Koji od ponuđenih odgovora opisuje Akermanovu funkciju?
    (a) Ona je primitivno rekurzivna, ali nije uopšteno rekurzivna.
    (b) Ona je primer funkcije koja je totalna i izračunljiva, ali nije primitivno rekurzivna.
    (c) Ona nije izračunljiva ni na jednom poznatom modelu računanja.

17. Da li se svaka primitivno rekurzivna funkcija može izračunati URM programom koji garantovano nema beskonačne petlje (tj. uvek se zaustavlja)?
    (a) Da
    (b) Ne

18. Objasnite ukratko ideju kodiranja URM programa? Koje su najznačajnije posledice mogućnosti kodiranja programa.

19. Šta predstavlja univerzalni URM program? Koju funkciju on izračunava?

20. Kako se uređeni par (x, y) može bijektivno i efektivno kodirati jednim prirodnim brojem?

21. Navesti primere gde se u praksi koristi teorijski koncept univerzalnog programa?

22. Neka je P URM program, a $f_P^{(k)}$ parcijalna funkcija arnosti k koju taj program izračunava. Ako se program P ne zaustavlja za ulaznu k-torku $(x_1, \ldots, x_k)$, vrednost $f_P^{(k)}(x_1, \ldots, x_k)$ je:
    (a) Vrednost 0
    (b) Vrednost u registru R_1 u trenutku beskonačne petlje
    (c) Nedefinisana
    (d) Proizvoljan prirodan broj

23. Dat je sledeći URM program:

```
1. J(1, 2, 4)
2. S(1)
3. J(1, 1, 1)
```

    Ako su početne vrednosti registara $R_1 = 2$ i $R_2 = 4$, odredite da li se program zaustavlja i koja je krajnja vrednost u registru R_1.

24. Koja od sledećih tvrdnji je tačna za skup svih URM programa?
    (a) Skup URM programa je konačan.
    (b) Skup URM programa je prebrojivo beskonačan.
    (c) Skup URM programa je neprebrojiv (kardinalnosti kontinuuma).

25. Kako formalno definišemo parcijalnu funkciju koju izračunava dati URM program?

26. Na koji način možemo funkciju sabiranja $add(x, y) = x + y$ predstaviti pomoću primitivne rekurzije?

27. Da li postoji totalna funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja *nije* URM-izračunljiva? Odgovor obrazložiti i navesti primer.

28. Operator primitivne rekurzije omogućava definisanje nove funkcija $f(y, x_1, \ldots, x_k)$ pomoću dve date funkcije $g(x_1, \ldots, x_k)$ i $h(y, x_1, \ldots, x_k, z)$. Koja je uloga funkcije $g(x_1, \ldots, x_k)$?

(a) Ona predstavlja rekurzivni korak.

(b) Ona predstavlja bazni slučaj rekurzije (za $y = 0$).

(c) Ona ograničava maksimalan broj iteracija petlje.

29. Objasnite zašto je funkcija prethodnika $prev(x)$ primitivno rekurzivna. Kako glasi njena formalna definicija preko operatora primitivne rekurzije?

30. Objasniti zbog čega parcijalna funkcija koja je definisana pomoću minimizacije (μ-operatora) nad primitivno rekurzivnom funkcijom ne mora biti definisana za svaki ulaz? U kojim slučajevima neće biti definisana?

31. Šta tvrdi Klinijeva teorema o normalnoj formi?

32. Na osnovu $s-m-n$ teoreme (teoreme o parametrizaciji), ako fiksiramo deo ulaznih argumenata neke izračunljive funkcije, šta nam ta teorema garantuje?

    (a) Da će novodobijena funkcija uvek biti primitivno rekurzivna.

    (b) Da postoji primitivno rekurzivna funkcija koja izračunava kôd novog programa koji odgovara preostalim argumentima.

    (c) Da će novodobijena funkcija biti totalna.

33. Ukratko objasniti kako se u postupku kodiranja URM programa obezbeđuje jednoznačnost?

34. Da li se iz kôda e nekog URM programa može efektivnim postupkom (algoritamski) rekonstruisati kompletan spisak instrukcija tog programa? Odgovor obrazložiti.

35. Navedite jedan tipičan primer primene s-m-n teoreme u dokazima u teoriji izračunljivosti?

36. U Klinijevoj teoremi o normalnoj formi, svaka μ-rekurzivna funkcija se može predstaviti u obliku koji koristi samo jednu primenu operatora μ, tj. u obliku:

$$f(x_1, \ldots, x_k) = P(\mu z[Q(x_1, \ldots, x_k, z) = 0])$$

    gde su P i Q primitivno rekurzivne funkcije. Koja je uloga funkcije P?

    (a) Ona simulira rad URM mašine korak po korak.

    (b) Ona iz kôda uspešnog završetka izračunavanja (z) izdvaja krajnji rezultat (sadržaj registra R_1).

    (c) Ona proverava da li je program sa indeksom e ušao u beskonačnu petlju.

37. Formulišite Kliniijevu teoremu o fiksnoj tački (teoremu o rekurziji).

38. Ako je $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ totalna izračunljiva funkcija koja transformiše kôdove programa, teorema o fiksnoj tački nam garantuje postojanje kôda n takvog da važi:

    (a) $h(n) = n$ (funkcija h bukvalno ne menja broj n).

    (b) $\phi_{h(n)} = \phi_n$ (programi sa indeksima $h(n)$ i n izračunavaju istu funkciju).

    (c) $\phi_n(x) = h(x)$ za svako x.

39. Zašto je teorema o fiksnoj tački konceptualno važna za programiranje?

40. Napisati URM program koji udvostručuje vrednost na ulazu ($f(x) = 2x$).

Problemi odlučivanja

1. Kako se problem odlučivanja (gde je odgovor ,,da" ili ,,ne") formalno reprezentuje u teoriji izračunljivosti? Preko kog matematičkog objekta?

2. Šta intuitivno znači kada za neki problem kažemo da je ,,poluodlučiv"? Kako

se ponaša algoritam (URM program) za proveru pripadnosti tom skupu ako mu prosledimo element koji *ne pripada* skupu?

3. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ skup. Kako definišemo karakterističnu funkciju skupa A, u oznaci $\chi_A(x)$? Šta treba da važi za tu funkciju da bi skup A bio rekurzivan?
4. Da li je karakteristična funkcija $\chi_A(x)$ rekurzivnog skupa A uvek totalna funkcija?
   (a) Da
   (b) Ne
5. Da li postoji algoritam (URM program) koji za bilo koji dati URM program P i bilo koji ulaz x može da utvrdi da li će program P ispisati nulu u registru R_1? Obrazložiti odgovor (na osnovu koje teoreme to znamo?)
6. Koje od sledećih svojstava URM programa predstavlja semantičko svojstvo na koje se može primeniti Rajsova teorema?
   (a) "Program P sadrži tačno 5 instrukcija skoka."
   (b) "Program P računa totalnu funkciju $f(x) = x^2$."
   (c) "Program P koristi registar R_{10} tokom rada."
7. Neka je $A = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna funkcija}\}$. Da li je skup A rekurzivno nabrojiv?
   (a) Da
   (b) Ne
8. Ako je skup A rekurzivan (odlučiv), a skup B se dobija kao komplement skupa A, šta možemo zaključiti o skupu B?
   (a) Skup B je rekurzivno nabrojiv, ali nije rekurzivan.
   (b) Skup B je takođe rekurzivan (odlučiv).
   (c) Skup B je neodlučiv.
9. Formulišite Rajsovu teoremu.
10. Da li je relacija $T(e, x, y)$, koja označava da se program sa kôdom e za ulaz x zaustavlja nakon najviše y koraka, odlučiva? Odgovor obrazložiti.
11. Opšti problem zaustavljanja („$\phi_x(y) \neq -$?") je neodlučiv. Koji od sledećih problema su takođe garantovano neodlučivi:
    - „$\phi_x(x) \neq -$?"
    - „$\phi_x(c) \neq -$?" za neku fiksiranu konstantu c
    - „$\phi_c(x) \neq -$?" za neku fiksiranu konstantu c
12. Polukarakteristična funkcija skupa A, u oznaci $\overline{\chi}_A(x)$, za $x \notin A$ ima vrednost:
    (a) 0
    (b) -1
    (c) Nedefinisana je
13. Definišite kada za skup $A \subseteq \mathbb{N}$ kažemo da je polurekurzivan (rekurzivno nabrojiv)?
14. Da li je svaki rekurzivan skup ujedno i rekurzivno nabrojiv? Obrazložiti odgovor.
15. Ako je skup A polurekurzivan, ali ne i rekurzivan, kakav je njegov komplement B?
    (a) Takođe je rekurzivno nabrojiv.
    (b) Može biti rekurzivno nabrojiv, ali nije rekurzivan.
    (c) Nije rekurzivno nabrojiv.

16. Šta tvrdi Postova teorema?
17. Rajsova teorema se bavi odlučivošću svojstava kojih objekata?
    (a) Sintaksne strukture URM programa (npr. broj instrukcija).
    (b) Funkcija koje URM programi izračunavaju (semantička svojstva).
    (c) Vremenske složenosti izvršavanja programa.
18. Navedite jedan primer netrivijalnog semantičkog svojstva programa na koje se može primeniti Rajsova teorema.
19. Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$. Znamo je da je skup A rekurzivno nabrojiv ako i samo ako postoji izračunljiva funkcija f takva da je $A = dom(f)$. Kako iz te funkcije f eksplicitno konstruišemo polukarakterističnu funkciju $\overline{\chi}_A(x)$?
20. Zbog čega se za polurekurzivne skupove kaže i da su ,,rekurzivno nabrojivi"?
21. Ukratko skicirati ideju dokaza Postove teoreme (bez tehničkih detalja).
22. Definišimo skup $K_0 = \{\pi(e, x) \mid \phi_e(x) \neq -\}$, gde je $\pi(e, x)$ kôd para (e, x) prirodnih brojeva. Ako sa $\overline{K_0}$ označimo komplement ovog skupa, koje od sledećih tvrđenja je tačno?
    (a) K_0 je rekurzivno nabrojiv, a $\overline{K_0}$ nije rekurzivno nabrojiv.
    (b) K_0 nije rekurzivno nabrojiv, a $\overline{K_0}$ jeste rekurzivno nabrojiv.
    (c) Nijedan od ta dva skupa nije rekurzivno nabrojiv.
23. Neka je $A = \{e \mid \text{program } P_e \text{ sadrži najviše 10 instrukcija}\}$. Da li se Rajsova teorema može primeniti na ovaj skup kako bi se dokazala njegova neodlučivost? Obrazložiti odgovor.
24. U kontekstu Rajsove teoreme, šta formalno znači da je svojstvo funkcija $\mathcal{F}$ *netrivijalno*?
25. Neka je $T = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$. Primenom Rajsove teoreme ili nekako drugačije, dokazati da ovaj skup nije rekurzivan.
26. Za skup $T = \{e \mid \phi_e \text{ je totalna}\}$ važi da:
    (a) Jeste rekurzivno nabrojiv, ali nije rekurzivan.
    (b) Nije rekurzivno nabrojiv, ali je njegov komplement $\overline{T}$ rekurzivno nabrojiv.
    (c) Ni on, ni njegov komplement nisu rekurzivno nabrojivi.
27. Neka je $f(e, x, s)$ funkcija koja vraća 1 ako se program e na ulazu x zaustavlja u tačno s koraka, a 0 u suprotnom. Ova funkcija je:
    (a) Primitivno rekurzivna.
    (b) μ-rekurzivna, ali nije totalna.
    (c) Dokazano neizračunljiva.
28. Zaokružiti tačne odgovore:
    (a) problem zadovoljivosti u iskaznoj logici je odlučiv
    (b) problem tautologičnosti (valjanosti) u iskaznoj logici je odlučiv
    (c) problem $\Gamma \models A$ u iskaznoj logici je odlučiv ako je Γ konačan skup
    (d) problem $\Gamma \models A$ u iskaznoj logici je odlučiv ako je Γ beskonačan skup.
29. Ako je Γ proizvoljni beskonačan rekurzivan skup iskaznih formula, a A je proizvoljna iskazna formula, tada znamo da problem $\Gamma \models A$ nije odlučiv, ali da jeste poluodlučiv. Na osnovu čega tvrdimo njegovu poluodlučivost?

30. Koja je osnovna ideja na kojoj se bazira Tjuringov dokaz neodlučivosti problema valjanosti u logici prvog reda?
31. Zaokružiti tačno tvrđenje:
    (a) Problem zadovoljivosti formule prvog reda je poluodlučiv
    (b) Problem *nezadovoljivosti* formule prvog reda je poluodlučiv
    (c) I problem zadovoljivosti i problem nezadovoljivosti formule prvog reda su poluodlučivi, ali nisu odlučivi
    (d) Ni problem zadovoljivosti ni problem nezadovoljivosti formule prvog reda nisu poluodlučivi.

Deduktivni sistemi

1. Šta formalno predstavlja *kontekst* u sistemu prirodne dedukcije? Od kojih delova se sastoji i kako se obeležava?
2. Ako imamo kontekst $\Gamma \vdash A$, skup formula Γ nazivamo:
    (a) Teoreme
    (b) Pretpostavke (hipoteze)
    (c) Zaključak
    (d) Aksiome
3. Da li skup pretpostavki Γ u kontekstu $\Gamma \vdash A$ može biti prazan?
    (a) Da
    (b) Ne
4. Koje pravilo prirodne dedukcije nam omogućava da iz konteksta $\Gamma \vdash A$ i $\Gamma \vdash B$ izvedemo kontekst $\Gamma \vdash A \wedge B$?
    (a) Pravilo uvođenja konjunkcije ($\wedge I$)
    (b) Pravilo eliminacije konjunkcije ($\wedge E$)
    (c) Pravilo uvođenja implikacije ($\Rightarrow I$)
5. Napišite formalni zapis za dva pravila eliminacije konjunkcije ($\wedge E_1$ i $\wedge E_2$).
6. Ako imamo dokaz za kontekst $\Gamma \vdash A$, da li pravilo uvođenja disjunkcije ($\vee I_1$) dozvoljava da odmah izvedemo kontekst $\Gamma \vdash A \vee B$ za bilo koju formulu B?
    (a) Da
    (b) Ne
7. Koje pravilo prirodne dedukcije uklanja pretpostavku iz skupa pretpostavki i prebacuje je u sam zaključak formule?
    (a) Pravilo eliminacije disjunkcije ($\vee E$)
    (b) Pravilo uvođenja implikacije ($\Rightarrow I$)
    (c) Pravilo uvođenja negacije ($\neg I$)
8. Kako glasi čuveno pravilo *Modus Ponens*? Za eliminaciju kog veznika koristimo ovo pravilo u prirodnoj dedukciji?
9. Pravilo eliminacije disjunkcije ($\vee E$) zahteva dokazivanje tri konteksta da bi se izvelo $\Gamma \vdash C$. Ako je prvi kontekst $\Gamma \vdash A \vee B$, koja su preostala dva konteksta?
    (a) $\Gamma \vdash A$ i $\Gamma \vdash B$
    (b) $\Gamma, A \vdash C$ i $\Gamma, B \vdash C$

(c) $\Gamma \vdash C \to A$ i $\Gamma \vdash C \to B$

10. Formulišite pravilo eliminacije negacije ($\neg E$).
11. Pravilo koje nam omogućava da iz kontradikcije izvedemo apsolutno bilo koju formulu A naziva se:
    (a) Pravilo uvođenja negacije ($\neg I$)
    (b) Pravilo eliminacije apsurda ($\bot E$)
    (c) Pravilo svedenja na kontradikciju ($ccontr$)
12. U čemu je razlika između prirodne dedukcije za klasičnu i intuicionističku logiku?
13. Šta znači da je formula A *teorema* deduktivnog sistema prirodne dedukcije? Kako izgleda kontekst koji to reprezentuje?
14. Kada kažemo da je skup formula Γ *nekonzistentan* u sistemu prirodne dedukcije?
15. Ako je skup formula Γ konzistentan (saglasan), šta to govori o mogućnosti izvođenja formule $\bot$ iz tog skupa?
    (a) Kontekst $\Gamma \vdash \bot$ je dokaziv.
    (b) Kontekst $\Gamma \vdash \bot$ nije dokaziv.
    (c) Kontekst $\Gamma \vdash \top$ nije dokaziv.
16. Ako važi $\Gamma, A \vdash \bot$, koji kontekst možemo dobiti primenom pravila uvođenja negacije ($\neg I$)?
17. Koja je glavna sintaksna razlika između pravila svođenja na kontradikciju ($ccontr$) i pravila uvođenja negacije ($\neg I$)?
18. Kako glasi čuvena *Gedelova teorema o potpunosti* logike prvog reda?
    (a) Svaka valjana formula prvog reda je dokaziva.
    (b) Svaka dokaziva formula prvog reda je valjana.
    (c) Logika prvog reda je neodlučiva.
19. Objasnite zašto se formalni dokaz u prirodnoj dedukciji prirodnije predstavlja u obliku *stabla* nego u obliku *niza* konteksta. Šta u tom stablu predstavljaju listovi, a šta koren?
20. Ako iz sistema prirodne dedukcije uklonimo pravilo $ccontr$ (svodjenje na kontradikciju), dobijamo intuicionističku logiku. Koja od sledećih formula *prestaje* da bude teorema u takvom oslabljenom sistemu?
    (a) $A \Rightarrow \neg\neg A$
    (b) $\neg\neg A \Rightarrow A$
    (c) $\neg(A \wedge \neg A)$
    (d) $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$
21. Kako biste u prirodnoj dedukciji formalno dokazali da formula $A \wedge B$ povlači formulu $B \wedge A$? Navedite koja pravila treba primeniti u drvetu izvođenja.
22. Ako je skup formula Γ nekonzistentan (tj. $\Gamma \vdash \bot$), da li iz toga sledi da svaki njegov podskup $\Delta \subseteq \Gamma$ takođe mora biti nekonzistentan?
    (a) Da
    (b) Ne
23. Dokazati da je $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ teorema prirodne dedukcije za iskaznu logiku.
24. Napišite formalno stablo dokaza u prirodnoj dedukciji za kontekst: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow$

$C \vdash A \Rightarrow C$.

25. Ako su formule A i $A \Rightarrow B$ teoreme sistema (dokazive iz praznog skupa pretpostavki), da li formula B mora takođe biti teorema sistema?
26. Zašto se pravila uvođenja disjunkcije ($\vee I_1$ i $\vee I_2$) smatraju „nedeterminističkim" u smislu automatizovanog dokazivanja (unazad)?
    (a) Zato što brišu informacije iz premisa.
    (b) Zato što pri kretanju od zaključka ka premisama moramo da „pogodimo" ili izaberemo formulu koja je otpala (B ili A).
    (c) Zato što uvode beskonačne petlje u algoritam pretrage.

Formalizacija matematike i njena ograničenja

1. Skolem-Lovenhajmova teorema nam kaže da ako je teorija prvog reda konzistentna, onda ona ima:
    (a) Isključivo konačne modele.
    (b) Modele svih beskonačnih kardinalnosti.
    (c) Isključivo neprebrojive modele.
2. Ako je skup svih teorema neke formalne teorije $\mathcal{T}$ rekurzivan skup, za tu teoriju kažemo da je:
    (a) Potpuna
    (b) Odlučiva
    (c) Konzistentna
3. Ako je skup svih aksioma Ax neke teorije $\mathcal{T}$ rekurzivan skup, za tu teoriju kažemo da je:
    (a) Potpuna
    (b) Aksiomatska
    (c) Odlučiva
4. Definišite kada je formalna teorija $\mathcal{T}$ *potpuna*.
5. Kako glasi aksiomatska šema indukcije u Peanovoj aritmetici? Na koji način se dobijaju konkretne instance ove šeme?
6. Napišite Peanovu aksiomu koja garantuje da nula (0) nije sledbenik nijednog prirodnog broja.
7. Na koji način se aksiomatski definiše operacija sabiranja (+) u Peanovoj aritmetici? Koji koncept iz programiranja se prepoznaje u ovoj definiciji?
8. Šta predstavlja *standardni model* Peanove aritmetike? Koji skup čini njegov domen?
9. Ako je formula A dokaziva u Peanovoj aritmetici ($\vdash_{\mathcal{P}} A$), da li ona mora biti tačna u standardnom modelu prirodnih brojeva? Obrazložiti odgovor.
10. Postupak kojim se svakom simbolu, formuli i dokazu formalne teorije dodeljuje jedinstven prirodan broj naziva se:
    (a) Dioganalizacija
    (b) Kodiranje (Gedelizacija)
    (c) Parametrizacija

11. Da li je relacija „izvođenje sa kôdom y predstavlja dokaz formule sa kôdom x u Peanovoj aritmetici" odlučiva? Obrazložiti odgovor.
12. Šta nam intuitivno tvrdi *Prva Gedelova teorema o nepotpunosti*?
13. Da li se nepotpunost Peanove aritmetike može otkloniti tako što u skup aksioma dodamo *Gedelovu rečenicu* (tj. rečenicu za koju Gedelova teorema tvrdi da je nedokaziva)? Obrazložiti odgovor.
14. Neka je G *Gedelova rečenica* konstruisana za Peanovu aritmetiku $\mathcal{P}$. Šta ta formula intuitivno tvrdi o samoj sebi?
    (a) „Ja sam dokaziva u $\mathcal{P}$."
    (b) „Ja nisam dokaziva u $\mathcal{P}$."
    (c) „Peanova aritmetika je nekonzistentna."
15. Šta možemo zaključiti o statusu Gedelove rečenice G unutar teorije $\mathcal{P}$?
    (a) Formula G je dokaziva, ali njena negacija $\neg G$ nije.
    (b) Niti se može dokazati G, niti $\neg G$.
    (c) Formula $\neg G$ je dokaziva, a formula G nije.
16. Kako glasi tvrđenje *Druge Gedelove teoreme o nepotpunosti*?
17. Da li Druga Gedelova teorema znači da je nemoguće dokazati konzistentnost Peanove aritmetike unutar nekog drugog, još moćnijeg formalnog sistema (npr. u teoriji skupova)?
    (a) Da, konzistentnost $\mathcal{P}$ se ne može dokazati nigde.
    (b) Ne, nemoguće je dokazati je unutar same $\mathcal{P}$ (ili slabijih sistema), ali u jačim sistemima je moguće.
18. Šta formalno znači da je delimična izračunljiva funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *izraziva* u Peanovoj aritmetici?
19. Formula $proof(x, y)$ formalno izražava da je izvođenje sa kôdom y dokaz formule sa kôdom x u Peanovoj aritmetici. Koju vrstu promenljivih (slobodne ili vezane) predstavljaju x i y u ovoj formuli?
    (a) Obe promenljive su vezane univerzalnim kvantifikatorom.
    (b) Obe promenljive su slobodne promenljive unutar formule.
    (c) x je slobodna, a y je vezana egzistencijalnim kvantifikatorom.
20. Kako glasi Lema o fiksnoj tački (Lema o dijagonalizaciji) za Peanovu aritmetiku? Ako je data formula $\mathcal{A}(x)$ sa jednom slobodnom promenljivom, šta nam ova lema garantuje?
21. Gedelova rečenica se dobija primenom *leme o dijagonalizaciji* na koju formulu?
22. Prva Gedelova teorema o nepotpunosti tvrdi da Gedelova rečenica Φ nije dokaziva u Peanovoj aritmetici. Na osnovu čega znamo da je ta rečenica *tačna* u standardnom modelu $\mathbb{N}$?
23. Pošto je Gedelova rečenica Φ istinita u standardnom modelu $\mathbb{N}$, ali nije dokaziva u Peanovoj aritmetici $\mathcal{P}$, šta nam to govori o postojanju *nestandardnih modela* Peanove aritmetike? Kakva je vrednost rečenice Φ u tim nestandardnim modelima?
24. Ako bismo Gedelovu rečenicu Φ dodali u skup aksioma Peanove aritmetike $\mathcal{P}$ kao novu aksiomu i dobili teoriju $\mathcal{P}'$, da li bi takva teorija $\mathcal{P}'$ bila potpuna? Odgovor obrazložiti.
25. Objasnite ukratko ideju dokaza neodlučivosti aritmetike na osnovu poznate činjenice

o neodlučivosti problema zaustavljanja?

Složenost izračunavanja

1. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za nisku $w \in \Sigma^*$ datu na ulazu ispituje da li je parne dužine (ukoliko je odgovor potvrdan, mašina treba da završi u stanju q_{da}, a u suprotnom u stanju q_{ne}).
2. Zbog čega su Tjuringove mašine pogodnije za formalnu definiciju složenosti izračunavanja od URM programa?
3. Kako se definiše vremenska složenost $t_T(n)$ Turingove mašine T koja se uvek zaustavlja? Šta predstavlja argument n, a šta vrednost $t_T(n)$?
4. Ako se za funkciju složenosti $f(n)$ kaže da je $O(g(n))$, to asimptotski znači da:
   (a) Funkcija $f(n)$ raste strogo brže od $g(n)$ za sve vrednosti n.
   (b) Funkcija $g(n)$ predstavlja gornju granicu rasta funkcije $f(n)$ počevši od nekog n_0, do na multiplikativnu konstantu.
   (c) Funkcije $f(n)$ i $g(n)$ imaju identične vrednosti za svako prirodno n.
5. Definišite klasu složenosti P. Kakve probleme ona formalno obuhvata?
6. Šta predstavlja skraćenica NP u nazivu klase složenosti NP?
   (a) Ne-polinomska
   (b) Nedeterministička polonomska
   (c) Numerički problem
7. Objasnite pojam *sertifikata* u kontekstu definicije klase NP.
8. Da li važi inkluzija P $\subseteq$ NP? Obrazložiti odgovor.
9. Koji od sledećih problema su još uvek otvoreni u teoriji složenosti izračunavanja:
   (a) Da li je P = NP?
   (b) Da li je P $\subseteq$ PSPACE?
   (c) Da li je NP $\subsetneq$ EXP?
   (d) Da li je P = PSPACE?
   (e) Da li je NP = co-NP?
10. Definišite klasu složenosti co-NP.
11. Da li je problem zadovoljivosti iskaznih formula (SAT) dokazano izvan klase P (odnosno, da li je definitivno dokazano da se SAT ne može rešiti u polinomskom vremenu)?
    (a) Da, to je dokazano.
    (b) Ne, to se još uvek ne zna (zavisi od pitanja $P \stackrel{?}{=} NP$).
12. Za problem A kažemo da se može polinomski transformisati u problem B (u oznaci $A \leq_p B$) ako postoji funkcija f izračunljiva u polinomskom vremenu takva da važi:
    (a) $x \in A \iff f(x) \in B$
    (b) $x \in A \iff f(x) \notin B$
    (c) $f(x) \in A \iff x \in B$
13. Ako važi $A \leq_p B$), i ako znamo da se problem B može rešiti u polinomskom vremenu ($B \in$ P), da li iz toga sledi da se i problem A može rešiti u polinomskom vremenu ($A \in$ P)? Obrazložiti odgovor.

14. Da bi neki problem B bio klasifikovan kao *NP-kompletan*, on mora da zadovolji dva uslova. Koji su to?
15. Šta tvrdi Kukova teorema?
16. Kako se definiše klasa složenosti PSPACE?
    (a) To je klasa problema koje deterministička Turingova mašina može rešiti koristeći eksponencijalno mnogo ćelija trake.
    (b) To je klasa problema koje deterministička Turingova mašina može rešiti koristeći polinomski ograničen prostor (broj ćelija) u funkciji od dužine ulaza.
    (c) To je klasa problema koji zahtevaju beskonačnu traku.
17. Poređajte klase složenosti P, NP, PSPACE i EXP u lanac inkluzija koji je dokazan u teoriji složenosti (od najmanje ka najvećoj).
18. Da li je do danas matematički dokazano da je klasa P strogo manja (pravi podskup) od klase EXP, odnosno da važi P $\subsetneq$ EXP? Ako jeste, navesti primer problema koji jeste u EXP, a nije u P.
19. Objasnite kako se definiše vremenska složenost $t_T^{nd}(n)$ za *nedeterminističku* Turingovu mašinu (NTM).
20. Ako je vremenska složenost nekog algoritma $t_T(n) = n^3 \cdot \log n + 100n^2$, kojoj od ponuđenih klasa ovaj problem asimptotski pripada?
    (a) $O(n^2)$
    (b) $O(n^3)$
    (c) $O(n^4)$
    (d) $O(n \log n)$
21. Ako znamo da je $A \leq_p B$ i $B \leq_p C$, šta možemo zaključiti o odnosu problema A i C:
    (a) da je $A \leq_p C$
    (b) da je $C \leq_p A$
    (c) u opštem slučaju ne mora važiti ni $A \leq_p C$ ni $C \leq_p A$
22. Pretpostavimo da neko pronađe algoritam koji rešava problem SAT u vremenu $O(n^5)$. Šta bi to značilo za *sve* ostale probleme iz klase NP? Obrazložite odgovor.
23. Ako se dokaže da je P = NP, koja od sledećih tvrdnji bi automatski postala tačna?
    (a) NP $\neq$ co-NP
    (b) P = co-NP i posledično NP = co-NP
    (c) P = PSPACE
24. Kada želimo da dokažemo da je neki problem X NP-kompletan, a već znamo da je SAT NP-kompletan i da $X \in$ NP, koju polinomsku transformaciju je potrebno da konstruišemo:
    (a) $X \leq_p$ SAT
    (b) SAT $\leq_p X$
    (c) bilo koju od prethodne dve
25. Kako glasi definicija problema 3-SAT i po čemu se on razlikuje od uopštenog SAT problema?
26. Problem *klika* glasi: ,,Da li u datom grafu G postoji klika veličine k?". Kako glasi komplementarni problem ovog problema? Kojoj klasi pripada taj komplementarni

problem?

27. Da li problem SAT pripada klasi PSPACE? Obrazložiti odgovor.
28. Da li definicija klase EXP dopušta algoritme čije je vreme izvršavanja oblika $O(2^{2^n})$?
    (a) Da
    (b) Ne
29. Za klasu P važi da je zatvorena za operaciju komplementa. Šta na osnovu toga možemo zaključiti o odnosu između P i preseka NP ∩ co-NP?
    (a) P ⊆ (NP ∩ co-NP)
    (b) (NP ∩ co-NP) ⊆ P
    (c) Ti skupovi nemaju zajedničkih elemenata.

Lambda račun

1. Koje su dve osnovne operacije koje, polazeći od promenljivih, koristimo za izgradnju lambda izraza?
2. Lambda izraz $M\ N\ P$ je ekvivalentan sa:
    (a) $M\ (N\ P)$
    (b) $(M\ N)\ P$
    (c) svejedno je, redosled je nebitan
3. Posmatrajmo lambda apstrakciju $(\lambda x.(f\ x))\ (g\ x)$. Koja pojavljivanja promenljive x su slobodna, a koja su vezana operatorom apstrakcije?
4. Dat je lambda izraz $M = \lambda x.(\lambda z.x\ y)\ z$. Koje promenljive su slobodne, a koje vezane?
5. Kako se naziva pravilo koje formalizuje promenu imena vezane promenljive (npr. prelazak sa $\lambda x.x$ na $\lambda y.y$)?
    (a) α-konverzija
    (b) β-redukcija
    (c) η-redukcija
6. Definišite šta predstavlja jedan *redex* (reducibilni izraz) u kontekstu β-redukcije. Kako izgleda njegova opšta forma?
7. Postupkom β-redukcije u izrazu $(\lambda x.E)\ F$ se vrši zamena (supstitucija) $E[x \mapsto F]$. Koja pojavljivanja promenljive x u izrazu E se tom prilikom zamenjuju?
    (a) Samo slobodna pojavljivanja
    (b) Samo vezana pojavljivanja
    (c) I slobodna i vezana pojavljivanja
8. Lambda izraz je u *β-normalnoj formi* ako:
    (a) Ne dopušta ni jednu α-konverziju
    (b) Ne sadrži nijedan β-redex (ne može se dalje β-redukovati)
    (c) Nema slobodnih promenljivih
9. Šta tvrdi Čerč-Rozerova teorema (svojstvo *konfluentnosti*) za lambda račun?
10. Da li svaki lambda izraz ima β-normalnu formu? Ako ne, navesti primer izraza koji nema β-normalnu formu.

11. U lambda računu, logička vrednost *tačno* (Čerčov kombinator $true$) se definiše kao funkcija koja prima dva argumenta i vraća:
   (a) Prvi argument ($\lambda xy.x$)
   (b) Drugi argument ($\lambda xy.y$)
   (c) Oba argumenta primenjena jedan na drugi ($\lambda xy.x\ y$)
12. Čerčov kombinator za *netačno* ($false$) ima identičnu strukturu kao i:
   (a) Čerčov numeral $\overline{0}$
   (b) Karijev Y kombinator fiksne tačke
   (c) Funkcija *succ* koja izračunava sledbenik Čerčovog numerala
13. Kojim zatvorenim lambda izrazom predstavljamo Čerčov numeral $\overline{n}$ koji odgovara prirodnom broju n?
14. Koji od ponuđenih izraza predstavlja Čerčov numeral za broj 2?
   (a) $\lambda fx.f\ x$
   (b) $\lambda fx.f\ (f\ x)$
   (c) $\lambda fx.x$
15. Funkcija sledbenika (*succ*) u lambda računu se definiše kao $succ = \lambda n.\lambda f.\lambda x.f\ (n\ f\ x)$. Objasnite ukratko mehanizam njene primene nad numeralom $\overline{n}$.
16. Za kreiranje parova u lambda računu koristi se kombinator $mk\_pair = \lambda xy.\lambda f.f\ x\ y$. Kako se realizuje funkcija prve projekcije ($first$) koja iz para izdvaja njegov prvi element?
   (a) $first = \lambda p.p\ true$
   (b) $first = \lambda p.p\ false$
   (c) $first = \lambda p.p\ p$
17. Koji je osnovni motiv za uvođenje η-redukcije? Šta se time postiže?
18. Koja od sledećih relacija važi za čuveni Y kombinator (Karijev kombinator fiksne tačke) za bilo koji izraz M?
   (a) $Y\ M \Rightarrow_\beta M$
   (b) $Y\ M \Rightarrow_\beta M\ (Y\ M)$
   (c) $Y\ M \Rightarrow_\beta Y\ (M\ Y)$
19. Zašto nam je kombinator fiksne tačke (Y) neophodan u netipiziranom lambda računu da bismo implementirali funkcije kao što su faktorijel ili izračunavanje Fibonačijevih brojeva?
20. U kakvom je odnosu klasa funkcija izračunljivih u lambda računu sa klasom μ-rekurzivnih funkcija (i samim tim Turing-izračunljivih funkcija)?
   (a) Ove dve klase su ekvivalentne (svaka μ-rekurzivna funkcija se može predstaviti u lambda računu i obratno)
   (b) Lambda račun je Tjuring kompletan (svaka Tjuring-izračunljiva funkcija se može predstaviti u lambda računu), ali nije moguće svaku lambda-izračunljivu funkciju simulirati Tjuringovom mašinom
   (c) Lambda račun nije Tjuring kompletan, ali se svaka lambda-izračunljiva funkcija može predstaviti μ-izračunljivom funkcijom
21. Izvršite β-redukciju sledećeg lambda izraza do njegove normalne forme (prikažite

međukorake):

$$M = (\lambda x.x\ y)\ (\lambda z.z)$$

22. Pažljivo izvršite redukciju izraza u kojoj dolazi do preklapanja imena promenljivih:

$$M = (\lambda x.\lambda y.x\ y)\ (y\ z)$$

Prikažite međukorake i navedite gde je bilo neophodno primeniti α-konverziju radi izbegavanja kolizije imena.

23. Objasnite suštinsku razliku između *normalnog poretka redukcije* i *aplikativnog poretka redukcije*. Koji od njih uvek garantuje redukciju do normalne forme, ako ista postoji?

24. Dat je izraz $M = (\lambda x.y)\ \Omega$, gde je $\Omega = (\lambda z.z\ z)(\lambda z.z\ z)$. Kako se ovaj izraz ponaša u normalnom poretku evaluacije, a kako u aplikativnom? Da li obe strategije dovode do normalne forme?

25. Kombinator sabiranja prirodnih brojeva definisan je kao $add = \lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.m\ f\ (n\ f\ x)$. Dokažite direktnom redukcijom da je $add\ \overline{1}\ \overline{1} = \overline{2}$, gde su $\overline{1}$ i $\overline{2}$ odgovarajući Čerčovi numerali.

26. Kombinator množenja u lambda računu se definiše izuzetno elegantno kao $mul = \lambda m.\lambda n.\lambda f.m\ (n\ f)$. Objasnite intuitivno zašto kompozicija funkcija $m\ (n\ f)$ uspešno realizuje množenje vrednosti $m \cdot n$.

27. Da bismo realizovali uslovno grananje, potreban nam je predikat is_zero koji proverava da li je prosleđeni numeral jednak nuli. On se definiše kao $is\_zero = \lambda n.n\ (\lambda x.false)\ true$. Šta ovaj izraz vraća ako mu se kao argument prosledi numeral $\overline{0} = \lambda f.\lambda x.x$?

    (a) Vraća $true$, jer se funkcija $(\lambda x.false)$ ne primenjuje nijednom, pa preostaje argument $true$.

    (b) Vraća $false$, jer odmah izvršava unutrašnju apstrakciju.

    (c) Izraz divergira i ulazi u beskonačnu petlju.

28. Liste u lambda računu se najčešće predstavljaju preko parova, gde praznu listu označava kombinator $nil = false$, a konstruktor $cons = mk\_pair$. Napišite kako u potpunosti izgleda eksplicitni lambda izraz koji predstavlja listu od dva elementa $[a, b]$.

29. Pored Karijevog Y kombinatora, postoji i Tjuringov kombinator fiksne tačke $\Theta = A\ A$ gde je $A = \lambda g.\lambda f.f\ (g\ g\ f)$. Dokažite da za njega vaǐ relacija $\Theta\ M \Rightarrow_\beta M\ (\Theta\ M)$, gde je M proizvoljni izraz.

30. Za kakve lambda izraze kažemo da su *kombinatori* u lambda računu? Navesti primer jednog kombinatora.

31. Neka su dati kombinatori $K = \lambda xy.x$ i $S = \lambda xyz.(x\ z)\ (y\ z)$. Koji je od sledećih lambda izraza $\beta\eta$-ekvivalentan sa kombinatorom $I \equiv \lambda x.x$? (UPUTSTVO: primeniti ih na proizvoljan izraz M i videti šta se dobija)

    (a) $K\ K$

    (b) $S\ K\ K$

    (c) $S\ S\ K$

32. Da li je dopušteno primeniti η-redukciju na izraz $\lambda x.f\ x\ x$ i zameniti ga sa $f\ x$? Obrazložiti odgovor.

33. Konjunkcija logičkih vrednosti se u lambda računu može definisati kao $and = \lambda pq.p\ q\ false$. Pokažite kroz korake redukcije šta dobijamo kada izračunamo $and\ true\ false$,

zamenjujući $true$ i $false$ njihovim punim definicijama.

34. Kako se u lambda računu, koristeći rekurziju, može simulirati μ-operator (operator *minimizacije*?
35. Da li postoji algoritam koji za bilo koja dva lambda izraza M i N može da odluči da li su oni β-ekvivalentni ($M =_\beta N$)? Obrazložiti odgovor.

Teorija tipova

1. Koji je glavni motiv za uvođenje tipizacije izraza u programima?
2. Ako su σ i τ tipovi, kako se gradi složeni (funkcijski) tip u prosto tipiziranom lambda računu?
   (a) $\sigma \times \tau$
   (b) $\sigma \to \tau$
   (c) $\sigma + \tau$
3. Zapis $\sigma \to \tau \to \rho$ je ekvivalentan sa:
   (a) $(\sigma \to \tau) \to \rho$
   (b) $\sigma \to (\tau \to \rho)$
   (c) svejdno je, jer je to ekvivalentno
4. Šta predstavlja *kontekst* Γ u tvrđenju oblika $\Gamma \vdash E : \sigma$? Iz čega se on sastoji?
5. Formalni zapis $\Gamma \vdash M : \sigma$ označava da:
   (a) Izraz M ima tip σ pod pretpostavkama o tipovima slobodnih promenljivih koje su navedene u Γ.
   (b) Izraz M se redukuje u tip σ u tačno Γ koraka.
   (c) Kontekst Γ je podskup tipa σ.
6. Napišite formalno pravilo tipizacije za aksiomu varijable (pravilo *var*).
7. Koje pravilo tipizacije se primenjuje za izvođenje tipa izraza $\lambda x : \sigma.E$ na osnovu tipa izraza E i činjenice da je promenljivoj x u kontekstu Γ pridružen tip σ? Navesti formalno to pravilo. koji tip se tom prilikom pridružuje izrazu $\lambda x : \sigma.E$?
8. Napišite formalno pravilo tipizacije za aplikaciju (pravilo *app*). Ako imamo tipove za M i N, pod kojim uslovom je izraz $M\ N$ ispravno tipiziran i koji je njegov tip u tom slučaju?
9. Koja je razlika između eksplicitne (Čerč) i implicitne (Kari) tipizacije? Šta je prednost jedne, a šta druge?
10. Koji je tip kombinatora $I = \lambda x : \sigma.x$? Navesti izvodjenje tipa ovog izraza.
11. Izvesti tip izraza $E = \lambda f : \sigma \to \sigma \to \tau.x : \sigma.f\ x\ x$.
12. Šta tvrdi *teorema o jakoj normalizaciji* za jednostavno tipizirani lambda račun? Kakva je sudbina redukcije svakog izraza koji uspešno prođe proveru tipova?
13. S obzirom na teoremu o jakoj normalizaciji, da li se ozloglašeni netermnirajući izraz $\Omega = (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$ može tipizirati u sistemu prostih tipova?
    (a) Da
    (b) Ne
14. Osobina *očuvanja tipa tokom redukcije* garantuje da ako važi $\Gamma \vdash M : \sigma$ i $M \Rightarrow_\beta N$, tada za izraz N važi:

(a) $\Gamma \vdash N : \sigma$

(b) $\Gamma \vdash N : \sigma \to \sigma$

(c) N se ne može tipizirati

15. Šta je suština *Kari-Hauardovog izomorfizma*? Kojem objektu iz logike odgovara *tip* u lambda računu, a kojem objektu odgovara *lambda izraz* tog tipa?

16. U kontekstu Kari-Hauardovog izomorfizma, funkcijski tip $\sigma \to \tau$ direktno odgovara kom logičkom vezniku iz iskazne logike?

    (a) Konjunkciji ($\wedge$)

    (b) Disjunkciji ($\vee$)

    (c) Implikaciji ($\Rightarrow$)

17. Kom pravilu prirodne dedukcije, prema Kari-Hauardovom izomorfizmu, odgovara pravilo tipizacije *abs*, a kom pravilo *app*?

18. Ako je tip σ *nastanjen*, odnosno ako postoji makar jedan zatvoreni lambda izraz M takav da je $\vdash M : \sigma$, šta nam to govori o odgovarajućoj logičkoj formuli σ u prirodnoj dedukciji?

19. Ako želimo da proširimo Kari-Hauardov izomorfizam tako da pokrijemo konjunkciju ($\wedge$) iz logike, koji strukturalni tip moramo dodati u lambda račun?

    (a) Tip parova (dekartov proizvod tipova, $\sigma \times \tau$)

    (b) Tip unije (disjunktna unija, $\sigma + \tau$)

    (c) Prazan tip

20. Koja je negativna posledica teoreme o jakoj normalizaciji za prosto tipizirani lambda račun?

21. Na koji način možemo aksiomatski uvesti tip *bool* u prosto tipizirani lambda račun? Koje aksiome tipizacije treba uvesti i kako glase odgovarajuća pravila δ-redukcije?

22. Konstruišite kompletno formalno stablo izvođenja za sledeće tvrđenje:

$$\vdash \lambda x : \sigma.\lambda y : \tau.x : \sigma \to \tau \to \sigma$$

23. Neka je kontekst $\Gamma = \{f : \sigma \to \tau, x : \sigma\}$. Prikažite formalno stablo izvođenja za tvrđenje:

$$\Gamma \vdash f\, x : \tau$$

24. U Karijevom stilu *implicitne* tipizacije, tipovi se ne navode eksplicitno uz promenljive u apstrakciji (npr. pišemo $\lambda x.x$). Na koji način ovo komplikuje postupak određivanja tipa (engl. *type inference*)? Koji postupak nad tipovima je potrebno uraditi u cilju rekonstrukcije tipova promenljivih?

25. Posmatrajmo netipizirani izraz $M = \lambda x.\lambda y.x\ y$. Odredite da li je ovaj izraz tipizibilan i ako jeste, koji mu je najopštiji tip?

26. Neka je dat izraz $N = \lambda x.\lambda y.(x\ y)\ (x\ y)$. Da li je ovaj izraz tipizibilan u teoriji prostih tipova? Ako jeste, koji mu je najopštiji tip?

27. Pokušaj tipizacije izraza samoaplikacije $\lambda x.x\ x$ u sistemu prostih tipova ne uspeva zbog toga što je potrebno unifikovati tip t promenljive x sa tipom oblika $t \to t'$. Zbog čega ova unifikacija ne uspeva?

28. Kada u lambda izrazu imamo β-redex $(\lambda x : \sigma.M)\ N$, to računski predstavlja funkciju koja odmah prima argument. Šta taj redex predstavlja u drvetu dokaza u prirodnoj dedukciji? Kakva se konfiguracija pravila (koje uvođenje i koja eliminacija) tu direktno preklapaju?

29. Posmatrajmo iskaznu formulu $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$. Da li je tip $((\sigma \to \tau) \to \sigma) \to \sigma$ koji odgovara ovoj formuli u Kari-Hauardovom izomorfizmu nastanjen u jednostavno tipiziranom lambda računu? Ako jeste, navesti zatvoren izraz tog tipa (tj. izraz koji kodira dokaz date formule)?
30. Šta je unifikator dva prosta tipa σ i τ? Kada za unifikator kažemo da je *najopštiji*?
31. Gde nam je unifikacija tipova potrebna u procesu određivanja najopštijeg tipa datog lambda izraza?
32. Da li su tipovi $(t \to \sigma) \to (\sigma \to t)$ i $((t' \to \sigma) \to \sigma) \to (\sigma \to \sigma \to t')$ unifikabilni (σ je atomički tip, a t i t' su tipske promenljive)? Ako jesu, koji im je najopštiji unifikator?
33. U teoriji prostih tipova, u slučaju eksplicitne tipizacije, da li može postojati izraz E kome je moguće pridružiti dva različita tipa σ i τ? Obrazložiti odgovor.
34. Ako znamo da važi $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$ i $\Gamma \vdash N : \sigma$, šta možemo zaključiti o tipu izraza $M[x \mapsto N]$ u kontekstu Γ?
35. S obzirom na Kari-Hauardov izomorfizam, da li se svaki tipizirani lambda izraz može posmatrati kao *efektivni konstruktivni dokaz* (recept za konstrukciju) odgovarajuće matematičke teoreme?
    (a) Da
    (b) Ne
36. Ako bismo u sistemu prostih tipova eksplicitno (aksiomatski) dozvolili postojanje kombinatora fiksne tačke Y (dodelili mu tip $(\sigma \to \sigma) \to \sigma$ za svaki tip σ, kao i pravilo redukcije $Y\ F \Rightarrow_\delta F\ (Y\ F)$), šta bi se dogodilo sa teoremom o jakoj normalizaciji? Obrazložiti odgovor.