Одабрана поглавља механике 2009. **Други домаћи задатак**

(1) Нека је $\mathbf{e}_r = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$, $\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}$ покретни поларни координатни систем и $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{k}$ покретни цилиндрични координатни систем. Доказати да се брзина и убрзање изражавају са

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}, \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}.$$

(2) Планета масе m се креће око Сунца масе M. Уведимо координатни систем тако да је Сунце смештено у координатни почетак и да се планета у почетном положају налази у равни $x0y$. По Њутновом закону гравитације, кретање се одвија под дејством гравитационе силе

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}\|^2}\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}.$$

(а) Доказати да је $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$ за неки константан вектор $\mathbf{c}$ и закључити да се кретање одвија у једној равни.

(б) Доказати да је $\mathbf{c} = r^2\dot{\theta}\mathbf{k}$, где је $\mathbf{c}$ вектор из (а) и закључити да је $r^2\dot{\theta}$ константно.

(в) Доказати да је површина захваћена векторима положаја планете у тренуцима t_0 и t_1 и орбитом планете једнака $\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}r^2\, d\theta$.

(г) Извести из (б) и (в) **Други Кеплеров закон**: *Радијус вектор од Сунца до планете захвата једнаке површине у једнаким временима.*

(д) Претпоставимо да меримо време тако да је планета најближа Сунцу кад је $t = 0$ (и тиме $\dot{r}(0) = 0$, као први извод функције у њеном минимуму) и да је координатни систем изабран тако да је $\theta = 0$ кад је $t = 0$. Извести из (б) да је тада $r^2\dot{\theta} \equiv r_0 v_0$, где су r_0 и v_0 почетно растојање од Сунца и почетна брзина планете.

(ђ) Извести из (д) и Другог Њутновог закона да важи

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

и сменом $p = \frac{dr}{dt}$ свести ову једначину другог реда на једначину првог реда

$$p\frac{dp}{dr} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2},$$

а одатле, користећи почетне услове $r(0) = r_0$, $\dot{r}(0) = 0$ извести једначину

$$\dot{r}^2 = v_0^2\Big(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\Big) + 2GM\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big).$$

(е) Користећи (д) и (ђ) доказати да је

$$\frac{1}{r^4}\Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\Big(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\Big),$$

где је $h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2}$ и сменом $u = \frac{1}{r}$ свести ову једначину на

$$\frac{du}{d\theta} = \pm\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}, \quad \text{где је } u_0 := \frac{1}{r_0}. \qquad (\clubsuit)$$

(ж) Доказати да је $\dot{r} \geq 0$ за довољно мало $t \geq 0$, и из тога закључити да је
$$0 \leq \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{dr}{d\theta} = -r^2 \frac{du}{d\theta},$$
због чега једначину (♣) треба разматрати са негативним знаком.

(з) Узимајући у обзир да из почетних услова следи да је $u = u_0$ за $\theta = 0$ и да је u добијено сменом $u = \frac{1}{r}$, доказати да је решење једначине (♣)
$$r = \frac{(1+e)r_0}{1 + e\cos\theta}, \quad \text{где је } e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1,$$
што је формулација **Првог Кеплеровог закона**: *Путања планете око Сунца је конусни пресек са једним фокусом у Сунцу и са ексцентритетом* $\frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$.

(и) Нека је T период револуције планете око Сунца. Извести из (в) и (д) израз за површину елипсе по којој се планета креће: $P = \frac{1}{2} T r_0 v_0$.

(ј) Користећи (и) и познату формулу за површину елипсе $P = ab\pi$ доказати **Трећи Кеплеров закон**: *Однос квадрата периода револуције планете и куба велике полуосе елипсе је исти за сваку планету у систему и износи*
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

(3) Нека је $U \subset \mathbb{R}^3$ отворен скуп, $\mathbf{F}$ векторско поље а f функција на U, $dV := dx \wedge dy \wedge dz$ стандардна форма запремине, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $(\cdot, \cdot, \cdot)$ еуклидски скаларни и мешовити производ. Дефинишимо форме
$$\eta_f^0 := f, \quad \eta_{\mathbf{F}}^1 := \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle, \quad \eta_{\mathbf{F}}^2 := (\mathbf{F}, \cdot, \cdot), \quad \eta_f^3 := f\, dV.$$

(а) Доказати $\eta_{\mathbf{F}}^1 \wedge \eta_{\mathbf{G}}^1 = \eta_{\mathbf{F}\times\mathbf{G}}^2$ и $\eta_{\mathbf{F}}^1 \wedge \eta_{\mathbf{G}}^2 = \eta_{\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle}^3$.

(б) Доказати да су са
$$\eta_{\nabla f}^1 := d\eta_f^0, \quad \eta_{\nabla \times \mathbf{F}}^2 := d\eta_{\mathbf{F}}^1, \quad \eta_{\nabla \cdot \mathbf{F}}^3 := d\eta_{\mathbf{F}}^2$$
добро дефинисана векторска поља *градијент* ∇f и *ротор* $\nabla \times \mathbf{F}$ и скаларно поље *дивергенција* $\nabla \cdot \mathbf{F}$, и да се њихов запис у еуклидским координатама израчунава по правилу три множења вектора (скаларног и векторског производа вектора и множења вектора скаларом) вектором $\nabla := \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$.

(в) Доказати да је $\omega^3_{\nabla \cdot \mathbf{F}\times\mathbf{G}} = \omega^3_{\mathbf{G}\cdot\nabla\times\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{G}}$ и извести закључак да је $\operatorname{div} \mathbf{F} \times \mathbf{G} = \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G}$.

(г) По угледу на (в) доказати да важи $\operatorname{rot}(f\mathbf{F}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{F} + f \operatorname{rot} \mathbf{F}$ и $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{F}$.

(д) Доказати да је $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0$.

(ђ) Доказати да важи
$$\begin{aligned} &\int_\Sigma \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, && \int_\Sigma (d\mathbf{S} \times \nabla) \times \mathbf{F} = \int_{\partial\Sigma} d\mathbf{S} \times \mathbf{F}, \\ &\int_\Sigma \nabla f \times d\mathbf{S} = -\int_{\partial\Sigma} f\, d\mathbf{S}, && \int_V \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \\ &\int_V \nabla \times \mathbf{F}\, dV = -\int_{\partial V} \mathbf{F} \times d\mathbf{S}, && \int_V \nabla f\, dV = \int_{\partial V} f\, d\mathrm{S}. \end{aligned}$$

(е) *Лапласијан* Δ дефинише се као $\Delta = \operatorname{div} \circ \operatorname{grad}$. Доказати *Гринову формулу* $\int_V (g\Delta f - f\Delta g)\, dV = \int_{\partial V} (g\nabla f - f\nabla g) \cdot d\mathbf{S}$.