Теорија Морса 2007/08. **Трећи домаћи задатак**

(1) Нека је $SX := \mathbb{S}^1 \wedge X := \mathbb{S}^1 \times X / \mathbb{S}^1 \vee X$ суспензија простора X и $Sf : SX \to SY$ суспензија пресликавања $f : X \to Y$.
  (а) Доказати да је $S\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$.
  (б) Доказати да је $\deg f = \deg Sf$.
  (в) Индукцијом по n доказати **Хопфову теорему:** *Пресликавања $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ су хомотопски еквивалентна ако и само ако имају исти степен.*
  (г) Нека је $F : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times [0,1]$ дифеоморфизам цилиндра који је идентитет на кругу $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$, а ротација за 2π на кругу $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ (нпр. $F(\theta, t) = (\theta + 2t\pi, t)$). Доказати да F индукује дифеоморфизам $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ торуса и да је $\deg f = \deg \mathrm{id}$, али није $f \simeq \mathrm{id}$ (упоредити овај резултат са (в)).

(2) (а) Доказати да свако пресликавање $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ које је хомотопно идентичком има фиксну тачку. Да ли постоји пресликавање $f : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n+1}$ које је хомотопно идентичком, а нема фиксну тачку?
  (б) Нека је $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$. Доказати да или f има фиксну тачку, или f слика неку тачку у антиподалну, а $f \circ f$ има фиксну тачку. Да ли исто важи за сфере непарне димензије?
  (в) Група G слободно дејствује на $\mathbb{S}^{2n}$. Доказати да је $G = \{e\}$ или $G = \mathbb{Z}_2$. Да ли исто важи за сфере непарне димензије?

(3) Нека је $A \subset B \subset X$. Доказати да инклузија $\imath : A \hookrightarrow B$ индукује изоморфизам $H_k(A; \Lambda) \cong H_k(B; \Lambda)$ за свако k ако и само ако индукује изоморфизам $H_k(X, A; \Lambda) \cong H_k(X, B; \Lambda)$ за свако k.

(4) Нека је $A \subset X$ и нека је A ретракт простора X. Доказати да је $H_k(X; \Lambda) \cong H_k(A; \Lambda) \oplus H_k(X, A; \Lambda)$. Ако је A деформациони ретракт простора X, доказати да је $H_k(X, A; \Lambda) = 0$.

(5) Нека је X путно повезан и $\epsilon : C_0(X; \Lambda) \to \Lambda$ хомоморфизам дефинисан са $\sum \lambda_j s_j \mapsto \sum \lambda_j$ за сингуларне симплексе s_j и коефицијенте $\lambda_j \in \Lambda$ и нека је $\widetilde{H}_k(X; \Lambda)$ хомологија ланчастог комплекса

$$\cdots \xrightarrow{\partial} C_k(X; \Lambda) \xrightarrow{\partial} C_{k-1}(X; \Lambda) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0(X; \Lambda) \xrightarrow{\epsilon} \Lambda$$

(тзв. *редукована хомологија* простора X).
  (а) Доказати да је $\widetilde{H}_k(X; \Lambda) = H_k(X; \Lambda)$ за $k > 0$ и $\widetilde{H}_0(X; \Lambda) = 0$.
  (б) Доказати да је $H_k(X, *; \Lambda) = \widetilde{H}_k(X; \Lambda)$.

(6) Нека је A затворен подскуп у X и инклузија $i : A \hookrightarrow X$ кофибрација. Доказати да пресликавање $h : Ci = X \cup CA \xrightarrow{\pi} (X \cup CA)/CA \xrightarrow{\approx} X/A$, где је Ci цилиндар пресликавања i, индукује хомотопску еквиваленцију парова $(Ci, CA) \simeq (X/A, *)$. Извести закључак да из Аксиоме изрезивања следи да за кофибрацију (и, специјално, CW – пар) (X, A) важи $H_k(X, A; R) \cong H_k(X/A, *; R) \cong \widetilde{H}_k(X/A; \Lambda)$ (Аксиома факторизације).

(7) (а) Ако је $k < n$, доказати да не постоји сурјективно глатко пресликавање $s : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$.
  (б) Доказати да је $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ за $k < n$ и $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$.
  (в) За које $k, n \in \mathbb{N}$ је $\pi_k(\mathbb{R}P^n) = \pi_k(\mathbb{S}^n)$?
  (г) Каква је веза између $\pi_k(\mathbb{C}P^n)$ и $\pi_k(\mathbb{S}^{2n+1})$?

(8) Дати пример функције која има изоловане критичне тачке, али није Морсова.

(9) Нека је $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ скуп $n \times n$ матрица над $\mathbb{R}$. Доказати да је, за $n = 2$, детерминанта $\det : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ Морсова функција и наћи Морсове индексе њених критичних тачака. Да ли је детерминанта Морсова функција за $n > 2$?

(10) (а) Доказати да је функција висине на сфери $\mathbb{S}^2$ Морсова и описати Морсове координате око њених критичних тачака.
(б) Доказати да је функција висине на торусу $\mathbb{T}^2$ Морсова и описати Морсове координате око њених критичних тачака.

(11) Особина глатких пресликавања $f : M \to N$ назива се *стабилном* ако за свако $f : M \to N$ које има ту особину и за сваку глатку хомотопију $H : M \times [0,1] \to N$, $H(\cdot, 0) = f$ постоји $\varepsilon > 0$ такво да $f_t := H(\cdot, t)$ има ту особину за $t < \varepsilon$. Ако је M компактна многострукост, доказати да су следећа својства стабилна:
(а) својство „бити имерзија"
(б) својство „бити субмерзија";
(в) својство „бити локални дифеоморфизам";
(г) трансверзалност на дату затворену подмногострукост $S \subset N$.
Ако M није компактна, доказати да су наведена својства *локално стабилна* (дефинишући успут тај појам :-), а да не морају да буду стабилна.

(12) (а) Доказати да је функција $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова ако и само ако је њен диференцијал $df : M \to T^*M$ трансверзалан на нулто сечење.
(б) Доказати да је класа Морсових функција на компактној многострукости стабилна (а на некомпактној локално стабилна) у смислу Задатка 11.
(в) Нека је $\eta \in \Omega^1(M)$ *Морсова форма*, тј. затворена 1–форма $\eta : M \to T^*M$ трансверзална на нулто сечење. Доказати да свако $p \in M$ за које је $\eta(p) = 0$ има отворену околину U са локалним координатама у којима је $\eta = -x_1 dx_1 - \cdots - x_k dx_k + x_{k+1} dx_{k+1} + \cdots + x_n dx_n$, где је $n = \dim M$.

(13) (а) Нека су $f_0, f_1 : M \to \mathbb{R}$ две Морсове функције. Доказати да постоји глатка хомотопија $H : M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ таква да је $H(\cdot, i) = f_i$ за $i \in \{1, 2\}$ и да је $f_t := H(\cdot, t)$ Морсова функција за свако $t \in [0,1] \setminus \{t_1, \ldots, t_k\}$, где је $\{t_1, \ldots, t_k\}$ коначан скуп тачака.
(б) Да ли се две Морсове функције могу повезати глатком хомотопијом која је Морсова функција за свако t (тј. да ли је у (а) неопходно избацити скуп $\{t_1, \ldots, t_k\}$)?

(14) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција.
(а) Доказати да постоји Риманова метрика на M и Морсове координате око критичних тачака које су локалне изометрије у односу на ту метрику и стандардну еуклидску метрику у $\mathbb{R}^{\dim M}$.
(б) Доказати да су стабилна и нестабилна многострукост произвољне критичне тачке у односу на метрику из (а) (заиста, чиме је оправдано њихово име) глатке многострукости.
[Напомена: Тврђење (б) важи и за *сваку* Риманову метрику.]

Следећи час је 21. фебруара 2008. у 2 сата.