

- (1) (а) Којим векторским пољем је генерисано дејство $x \mapsto x \cos t + y \sin t$, $y \mapsto -x \sin t + y \cos t$ групе \mathbb{R} на $M = \mathbb{R}^2$? Нацртати то поље.
 (б) Наћи дејство групе \mathbb{R} на $M = \mathbb{R}^2$ генерисано векторским пољем $X = y \frac{\partial}{\partial x} - g \frac{\partial}{\partial y}$ (g је реална константа) и нацртати његове орбите.
- (2) Нека је $\phi : M \rightarrow N$ глатко пресликавање, X векторско поље на M и η диференцијална форма на N .
 (а) Да ли је са $Y := \phi_* X$ добро дефинисано векторско поље на N ? (Одговор: не.)
 (б) Да ли је са $\zeta := \phi^* \eta$ добро дефинисана диференцијална форма на M ? (Одговор: да.)
 (в) Доказати да, када са $Y := \phi_* X$ јесте добро дефинисано векторско поље на N , ϕ пресликава интегралне криве векторског поља X у интегралне криве векторског поља Y .
 (г) Ако је ϕ дифеоморфизам и W векторско поље на N , да ли је са $V := \phi^* W := (\phi^{-1})_* W$ добро дефинисано векторско поље на M ?
- (3) Нека је $\phi_t : M \rightarrow M$ једнопараметарска фамилија дифеоморфизама генерисана векторским пољем X и $\psi : M \rightarrow M$ дифеоморфизам. Доказати да је $\psi^* X = X$ ако и само ако је $\psi \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi$.
- (4) Нека су ϕ_t и ψ_t једнопараметарске фамилије дифеоморфизама компактне многострукости M , ϕ_t генерисана векторским пољем X , а ψ_t векторским пољем Y .
 (а) Доказати да је $\phi_t^* X = X$ и $\psi_t^* Y = Y$.
 (б) Испитати еквивалентност следећих тврђења:
 ♠ $[X, Y] = 0$;
 ◇ $\phi_t^* Y = Y$ и $\psi_t^* X = X$;
 ♥ $\phi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_t$;
 ♣ $X + Y$ генерише једнопараметарску фамилију $\phi_t \circ \psi_t$.
- (5) Доказати да векторска поља $X = y^2 \frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ у равни \mathbb{R}^2 генеришу једнопараметарске фамилије дифеоморфизама дефинисане за свако $t \in \mathbb{R}$, а векторско поље $X + Y$ не.
- (6) Нека је $X := (\xi^1, \dots, \xi^n)$ векторско поље на \mathbb{R}^n које генерише једнопараметарску фамилију дифеоморфизама $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ дефинисану за свако $t \in \mathbb{R}$ и нека је $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ глатка функција.
 (а) Доказати: $\frac{d}{dt} g \circ \phi_t = \frac{d}{dt} \phi_t^* g = \phi_t^* L_X g = L_X \phi_t^* g$.
 (б) Доказати да је функција $f(t, x) = g(\phi_t(x))$ (где је $x := (x_1, \dots, x_n)$) решење парцијалне диференцијалне једначине
- $$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \sum_{k=1}^n \xi^k(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, x), \quad f(0, x) = g(x).$$
- (в) Наћи решење $f(t, x, y)$ парцијалне диференцијалне једначине
- $$\frac{\partial f}{\partial t} = y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f(0, x, y) = y \sin x.$$
- (7) Нека је X_t фамилија векторских поља. Доказати
 (а) са $\frac{d\phi_t}{dt} = X_t \circ \phi_t$, $\phi_0 = \text{id}$ је добро дефинисана фамилија дифеоморфизама ϕ_t ;
 (б) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ ако и само ако X_t не зависи од t .