Глобална анализа 2010. **Трећи домаћи задатак**

(1) (а) Којим векторским пољем је генерисано дејство $x \mapsto x\cos t + y\sin t$, $y \mapsto -x\sin t + y\cos t$ групе $\mathbb{R}$ на $M = \mathbb{R}^2$? Нацртати то поље.
(б) Наћи дејство групе $\mathbb{R}$ на $M = \mathbb{R}^2$ генерисано векторским пољем $X = y\frac{\partial}{\partial x} - g\frac{\partial}{\partial y}$ (g је реална константа) и нацртати његове орбите.

(2) Нека је $\phi : M \to N$ глатко пресликавање, X векторско поље на M и η диференцијална форма на N.
(а) Да ли је са $Y := \phi_* X$ добро дефинисано векторско поље на N? (Одговор: не.)
(б) Да ли је са $\zeta := \phi^*\eta$ добро дефинисана диференцијална форма на M? (Одговор: да.)
(в) Доказати да, када са $Y := \phi_* X$ јесте добро дефинисано векторско поље на N, ϕ пресликава интегралне криве векторског поља X у интегралне криве векторског поља Y.
(г) Ако је ϕ дифеоморфизам и W векторско поље на N, да ли је са $V := \phi^* W := (\phi^{-1})_* W$ добро дефинисано векторско поље на M?

(3) Нека је $\phi_t : M \to M$ једнопараметарска фамилија дифеоморфизама генерисана векторским пољем X и $\psi : M \to M$ дифеоморфизам. Доказати да је $\psi^* X = X$ ако и само ако је $\psi \circ \phi_t = \phi_t \circ \psi$.

(4) Нека су ϕ_t и ψ_t једнопараметарске фамилије дифеоморфизама компактне многострукости M, ϕ_t генерисана векторским пољем X, а ψ_t векторским пољем Y.
(а) Доказати да је $\phi_t^* X = X$ и $\psi_t^* Y = Y$.
(б) Испитати еквивалентност следећих тврђења:
♠ $[X, Y] = 0$;
♢ $\phi_t^* Y = Y$ и $\psi_t^* X = X$;
♡ $\phi_t \circ \psi_t = \psi_t \circ \phi_t$;
♣ $X + Y$ генерише једнопараметарску фамилију $\phi_t \circ \psi_t$.

(5) Доказати да векторска поља $X = y^2\frac{\partial}{\partial x}$ и $Y = x^2\frac{\partial}{\partial y}$ у равни $\mathbb{R}^2$ генеришу једнопараметарске фамилије дифеоморфизама дефинисане за свако $t \in \mathbb{R}$, а векторско поље $X + Y$ не.

(6) Нека је $X := (\xi^1, \dots, \xi^n)$ векторско поље на $\mathbb{R}^n$ које генерише једнопараметарску фамилију дифеоморфизама $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ дефинисану за свако $t \in \mathbb{R}$ и нека је $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција.
(а) Доказати: $\frac{d}{dt} g \circ \phi_t = \frac{d}{dt}\phi_t^* g = \phi_t^* L_X g = L_X \phi_t^* g$.
(б) Доказати да је функција $f(t, x) = g \circ \phi_t(x)$ (где је $x := (x_1, \dots, x_n)$) решење парцијалне диференцијалне једначине

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(t, x), \qquad f(0, x) = g(x).$$

(в) Наћи решење $f(t, x, y)$ парцијалне диференцијалне једначине

$$\frac{\partial f}{\partial t} = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad f(0, x, y) = y\sin x.$$

(7) Нека је X_t глатка фамилија глатких векторских поља на M. Доказати
(а) ако је M затворена многострукост, са $\frac{d\phi_t}{dt} = X_t \circ \phi_t$, $\phi_0 = \mathrm{id}$ је добро дефинисана фамилија дифеоморфизама $\phi_t : M \to M$ за $t \in \mathbb{R}$;
(б) $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ ако и само ако X_t не зависи од t.