Глобална анализа 2010. **Седми домаћи задатак**

(1) Нека је $f : \mathbb{S}^{2n-1} \to \mathbb{S}^n$ глатко пресликавање и $[\eta]$ генератор кохомологије $H^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$.
   (а) Доказати да је $f^*\eta = d\omega$ за неку $(n-1)$–форму ω на $\mathbb{S}^{2n-1}$.
   (б) Доказати да интеграл
$$H(f) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \omega \wedge d\omega$$
не зависи од избора форме ω. $H(f)$ је тзв. **Хопфова инваријанта** пресликавања f.
   (в) Доказати да је за непарно n Хопфова инваријанта тривијална.
   (г) Доказати да хомотопски еквивалентна пресликавања имају исту Хопфову инваријанту, тј. да је H пресликавање
$$H : \pi_{2n-1}(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{R}.$$
   (д) Интерпретирати Хопфову инваријанту за $n = 2$ (тј. Хопфову инваријанту пресликавања $f : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$) преко коефицијента уланчавања кружница $f^{-1}(p)$ и $f^{-1}(q)$ за регуларне вредности p и q пресликавања f.
   (ђ) Израчунати $H(\pi)$ за Хопфову фибрацију $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$.

(2) Нека је $\Omega^*(\mathbb{S}^n)^I$ векторски простор диференцијалних форми на сфери $\mathbb{S}^n$ које су инваријантне у односу на антиподално пресликавање
$$a : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \quad a(x) := -x.$$
   (а) Доказати да је $(\Omega^*(\mathbb{S}^n)^I, d)$ диференцијални комплекс (ко-ланчасти комплекс) и да је њиме добро дефинисана инваријантна де Рамова кохомологија $H^*_{dR}(\mathbb{S}^n)^I$.
   (б) Доказати да је природно пресликавање $H^*_{dR}(\mathbb{S}^n)^I \to H^*_{dR}(\mathbb{S}^n)$ инјективно. Да ли је оно сурјективно?
   (в) Доказати да је $H^*_{dR}(\mathbb{S}^n)^I \cong H^*_{dR}(\mathbb{R}P^n)$.
   (г) Доказати да је генератор кохомологије $H^n(\mathbb{S}^n)$ нетривијална инваријантна кохомолошка класа ако и само ако је n непаран број.
   (д) Користећи овај задатак израчунати $H^*_{dR}(\mathbb{R}P^n)$.

(3) Нека Морсова функција $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}$ задовољава $f(-x) = f(x)$. Доказати да f има бар две критичне тачке сваког индекса $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(4) Доказати да Морсова функција на компактној површи рода g има најмање $2g + 2$ критичних тачака.

(5) Нека је M компактна многострукост без границе и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција која има 3 критичне тачке.
   (а) Доказати да је $\dim M$ паран број.
   (б) Израчунати хомологију многострукости M.

(6) Нека је M компактна многострукост без границе, $\dim M = n$, $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција и $c_k(f)$ број њених критичних тачака индекса k.
   (а) Доказати да је $c_k(f) = c_{n-k}(-f)$.
   (б) Закључити из (а) да, ако је n непаран, онда је $\chi(M) = 0$.
   (в) Ако је за неко k $c_{k+1}(f) = c_{k-1}(f) = 0$, доказати да је $c_k(f) = \beta_k(M)$, где је $\beta_k(M) := \dim H_k(M; \mathbb{R})$ k-ти Бетијев број многострукости M.