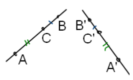
11. Аксиоме подударности

Аксиоме треће групе односе се на четворочлану релацију $\mathcal{C}$, која је један од основних појмова. Формулу $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ пишемо краће $(A, B) \cong (C, D)$ и читамо: пар тачака (A, B) **подударан** је пару тачака (C, D).

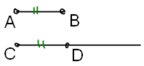
III1: Ако је $(A, B) \cong (C, D)$ и $A = B$ онда је и $C = D$.

III2: За произвољне тачке A и B важи $(A, B) \cong (B, A)$.

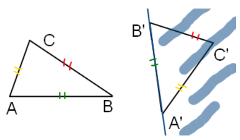
III3: Ако важи $(A, B) \cong (C, D)$ и $(A, B) \cong (E, F)$ онда је и $(C, D) \cong (E, F)$.



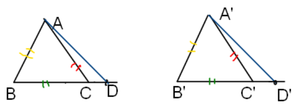
III4: Ако су C и C' тачке отворених дужи AB и $A'B'$ такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$ онда је и $(A, B) \cong (A', B')$.



III5: Ако су A и B две разне тачке и C теме полуправе Cp тада на тој полуправој постоји бар једна тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.



III6: Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и A', B' тачке руба једне полуравни такве да је $(A, B) \cong (A', B')$ онда у тој полуравни постоји јединствена тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$.



III7: Ако су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака и D и D' тачке полуправих BC и $B'C'$ такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, $(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$, $(B, D) \cong (B', D')$, онда је и $(A, D) \cong (A', D')$.

Теорема (10.1)

Релација $\mathcal{C}$ је релација еквиваленције на скупу парова тачака.

Доказ. (Рефлексивност.) Искористимо $III2$ (два пута):

$$(B, A) \cong (A, B)$$
$$(B, A) \cong (A, B).$$

Сада, применимо $III3$ на ове две подударности: добијамо $(A, B) \cong (A, B)$.
(Симетричност.) Нека је $(A, B) \cong (C, D)$. Такође је и $(A, B) \cong (A, B)$. Применом $III3$ добијамо $(C, D) \cong (A, B)$.
(Транзитивност.) Нека је $(A, B) \cong (C, D)$ и $(C, D) \cong (E, F)$. Из прве подударности имамо и $(C, D) \cong (A, B)$, а заједно са $(C, D) \cong (E, F)$ из $III3$ добијамо $(A, B) \cong (E, F)$. $\square$

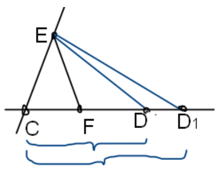
Дефиниција

Нека су $(A_1, \dots, A_n)$ и $(A'_1, \dots, A'_n)$ две n-торке тачака таквих да је $(A_i, A_j) \cong (A'_i, A'_j)$, за све $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Тада је $(A_1, \dots, A_n)$ **подударан** $(A'_1, \dots, A'_n)$ и пишемо $(A_1, \dots, A_n) \cong (A'_1, \dots, A'_n)$.

Теорема (10.2)

Ако су A и B две разне тачке и C теме полуправе Cp тада на тој полуправој постоји јединствена тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.

Доказ. Из $III5$ следи да постоји бар једна тачка D т.д. $(A, B) \cong (C, D)$, па треба доказати јединственост.
Претпоставимо и да за $D_1 \in Cp$ важи $(A, B) \cong (C, D_1)$. Тада је и $(C, D) \cong (C, D_1)$.



Постоји тачка E ван праве која садржи p. Нека је $F \in Cp$, $F \neq C$ произвољна тачка. Тривијално важи да је $(C, F, E) \cong (C, F, E)$, а при том су D и D_1 тачке полуправих $CF = CF$ такве да је $(C, D) \cong (C, D_1)$. Зато, на основу $III6$ следи да је и $(E, D) \cong (E, D_1)$.

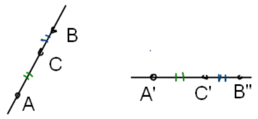
Дакле, сада је $(E, D) \cong (E, D_1)$ и $(C, D) \cong (C, D_1)$, а у полуравни са рубом EC, на основу $III6$ постоји само једна таква тачка, па је $D = D_1$. $\square$

Теорема (10.3)

Нека су A, B, C три разне колинеарне тачке и A' и B' такве да је $(A, B) \cong (A', B')$. Онда постоји јединствена тачка C' (у простору) таква да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$.
При том, A', B', C' су колинеарне и у распореду који одговара распореду тачка A, B, C ($\mathcal{B}(A, B, C) \Rightarrow \mathcal{B}(A', B', C'), \dots$).

Доказ. Показаћемо тврђење за случај $\mathcal{B}(A, C, B)$, у осталим случјевима се показује на сличан начин.

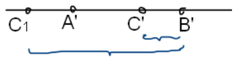
Нека су C' и B'' тачке полуправе $A'B'$ такве да важи $\mathcal{B}(A', C', B'')$ и да је $(A, C) \cong (A', C')$, $(C, B) \cong (C', B'')$. Тада, због $III4$ важи и да је $(A, B) \cong (A', B'')$.



Како је и $(A, B) \cong (A', B')$, а B' и B'' су тачке исте полуправе са теменом A', следи да је $B' = B''$. Дакле, важи и $(C, B) \cong (C', B')$, па C' испуњава услове теореме. При том је и $\mathcal{B}(A', C', B')$.

Треба показати да нема других тачака које испуњавају услов теореме. Ако би постојале, оне би могле бити или на полуправаој комплементној $A'B'$ или изван праве $A'B'$.

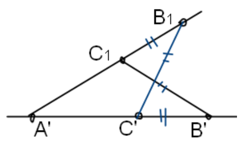
Претпоставимо да постоји C_1 на полуправаој комплементној $A'B'$ која испуњава услов. Тада је $(B', C') \cong (B, C) \cong (B', C_1)$, а при том су C' и C_1 тачке исте полуправе са теменом B', па је



$C' = C_1$. ↯

Претпоставимо, сада да постоји C_1 ван праве $A'B'$ која испуњава услов. Тада је и $(A', C_1) \cong (A', C')$, $(B', C_1) \cong (B', C')$.

Нека је B_1 таква да је $\mathcal{B}(A', C_1, B_1)$ и $(C_1, B_1) \cong (C', B')$. Због $III4$ тада важи и $(A', B_1) \cong (A', B')$.



Посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, C', C_1. Важи $(A, C', C_1) \cong (A, C_1, C')$. при том су B' и B_1 тачке полуправих $A'C'$ и $A'C_1$ такве да је $(A', B') \cong (A', B_1)$. Сада, на основу $III7$ следи и да је $(C', B_1) \cong (C_1, B')$.

Дакле, $(C_1, B_1) \cong (C_1, B')$ и $(C', B_1) \cong (C', B')$, а при том су B_1 и B' тачке исте полуравни са рубом $C'C_1$. Због $III6$ следи да је $B' = B_1$, односно да је свих 5 разматраних тачака колинеарно. ↯ □

Важе и аналогне теореме за тачке у равни, односно простору.

Теорема (10.4)

Нека су A, B, C три неколинеарне тачке и A', B', C' такве да је $(A, B, C) \cong (A', B', C')$. Ако је X тачка равни ABC, онда постоји јединствена тачка X' (у простору) таква да је $(A, B, C, X) \cong (A', B', C', X')$.
При том, X' припада равни $A'B'C'$ и у истом је положају према $A'B', \ldots$ као X према $AB, \ldots$. **БД**

$X, C \div AB \Rightarrow X', C' \div A'B', \ldots$

Теорема (10.5)

Нека су A, B, C, D четири некомпланарне тачке и A', B', C', D' такве да важи $(A, B, C, D) \cong (A', B', C', D')$. Тада за сваку тачку X простора постоји јединствена X' таква да је $(A, B, C, D, X) \cong (A', B', C', D', X')$.
При том, X' је у истом положају према $A'B'C', \ldots$ као X према $ABC, \ldots$ **БД**

$X, D \div ABC \Rightarrow X', D' \div A'B'C', \ldots$