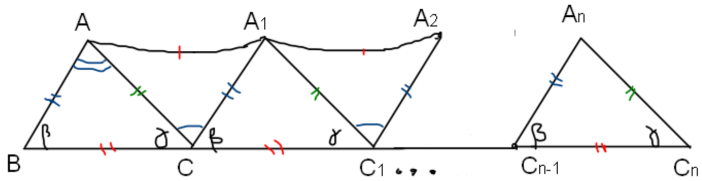
20. Лежандрове теореме

Доказаћемо четири теореме о збиру унутрашњих углова у троуглу.

Теорема (23.1)

Збир унутрашњих углова произвољног троугла није већи од π.

Доказ. Претпоставимо да постоји троугао ABC чији је збир унутрашњих углова већи од π.



Нека су $C_1, \dots, C_n$ т.д. $\mathcal{B}(B, C, C_1, \dots, C_n)$ и $BC \cong CC_1 \cong C_1C_2$ $\dots \cong C_{n-1}C_n$ и нека су $A_1, A_2, \dots, A_n$ тачке полуравни са рубом BC којој припада и A т.д. $\triangle ABC \cong \triangle A_1CC_1 \cong \dots \cong \triangle A_nC_{n-1}C_n$.

Тада је $AB \cong A_1C \cong \dots \cong A_nC_{n-1}$, $AC \cong A_1C_1 \cong \dots A_nC_n$,
$\angle ABC \cong \angle A_1CC_1 \cong \dots \cong \angle A_nC_{n-1}C_n (= \beta)$ $(*)$,
$\angle ACB \cong \angle A_1C_1C \cong \dots \cong \angle A_nC_nC_{n-1} (= \gamma)$ $(**)$.

Тада је и $\angle ACA_1 \cong \angle A_1C_1A_2 \cong \dots \cong \angle A_{n-1}C_{n-1}A_n$, као допуне углова из $(*)$ и $(**)$ у теменима C, C_1, $\dots C_{n-1}$ до опруженог.

Сада је $\triangle ACA_1 \cong \triangle A_1C_1A_2 \cong \dots \cong \triangle A_{n-1}C_{n-1}A_n$ по СУС, па је и $AA_1 \cong A_1A_2 \cong \dots \cong A_{n-1}A_n$.

Претпоставка је да је

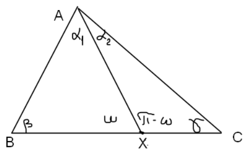
$$\angle BAC + \angle ACB + \angle CBA > \angle ACA_1 + \angle ACB + \angle A_1CC_1 (= \pi),$$

па је $\angle BAC > \angle ACA_1$. Како још за троуглове $\triangle BAC$ и $\triangle A_1CA$ важи $BA \cong A_1C$ и $CA \cong AC$, следи да је $BC > AA_1$ и постоји дуж d_1 т.д. $BC - AA_1 = d_1$. Због неједнакости троугла примењене на $\triangle ABC$ постоји и дуж d_2 т.д. $BA + AC - BC = d_2$.

Због неједнакости троугла "најкраћи пут" између тачака B и C_n је преко дужи BC_n, па је

$$\begin{aligned} BA + AA_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nC_n &> BC_n \\ BA + nAA_1 + AC &> (n+1)BC \\ BA + AC - BC &> n(BC - AA_1) \\ d_2 &> n \cdot d_1, \quad \text{за свако } n, \lightning. \quad \square \end{aligned}$$

За произвољни троугао $\triangle ABC$ означимо са $\sigma(\triangle ABC)$ збир његових унутрашњих углова. Тада је $\sigma(\triangle ABC) \le \pi$. Означимо са $\delta(\triangle ABC) = \pi - \sigma(\triangle ABC)$ **дефект** троугла ABC. Тада је $0 \le \delta(\triangle ABC) < \pi$.



Нека је X произвољна тачка ивице BC троугла ABC и нека су мере углова $\angle BAX = \alpha_1$, $\angle XAC = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle AXB = \omega$, па је $\angle AXC = \pi - \omega$. Тада је

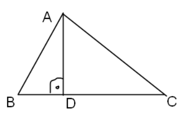
$$\begin{aligned} \delta(\triangle ABX) + \delta(\triangle ACX) &= \pi - (\alpha_1 + \beta + \omega) + \pi - (\alpha_2 + \gamma + \pi - \omega) \\ &= \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma) = \delta(\triangle ABC). \end{aligned}$$

Дакле дефект је усаглашен са разлагањем једног троугла на ("мање") троуглове.

Теорема (23.2)

Ако постоји троугао коме је збир унутрашњих углова π, онда је сваком троуглу збир унутрашњих углова π.

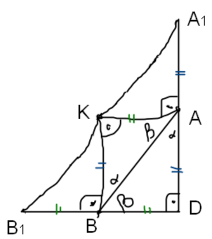
Доказ. Нека је $\sigma(\triangle ABC) = \pi$. Прво, разложимо га на два правоугла троугла. У произвољном троуглу збир углова је не већи од π.



Зато су бар два угла троугла оштри, нпр. овде $\angle ABC$ и $\angle ACB$. Тада је подножје висине D из тачке A на BC, т.д. $\mathcal{B}(B, D, C)$.

Сада је $\underbrace{\delta(\triangle ABD)}_{0\le} + \underbrace{\delta(\triangle ACD)}_{0\le} = \delta(\triangle ABC) = 0$, па је и $\delta(\triangle ABD) = 0$.

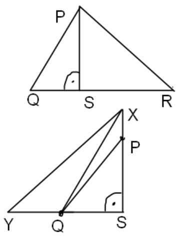
Друго, "конструишимо довољно велики троугао" коме је дефект 0.



Нека су A_1 и B_1 т.д. су A и B редом, средишта дужи DA_1 и DB_1. Нека је K т.д. $K, D \div AB$ и $(A, B, D) \cong (B, A, K)$. Тада је $\angle KAB + \angle BAD \cong \angle ABD + \angle BAD = \frac{\pi}{2}$, па је $\angle KAA_1$, а слично и $\angle B_1BK$ прав. Сада су, по СУС, $\triangle B_1BK \cong \triangle KAA_1 \cong \triangle BDA$. Зато је $\angle KB_1B \cong A_1KA \cong \angle ABD = \beta$ и $\angle B_1KB \cong \angle KA_1A \cong \angle BAD = \alpha$. Следи $\angle B_1KB + \angle BKA + \angle AKA_1 = \pi$, па су тачке B_1, K, A_1 колинеарне и важи $\mathcal{B}(B_1, K, A_1)$. Зато су и $\angle KB_1B$ и $\angle KA_1A$ углови троугла $\triangle A_1B_1D$, па је $\sigma(\triangle A_1B_1D) = \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Настављајући поступак, нека су $A_2, \ldots, A_n$ и $B_2, \ldots, B_n$ такве да су A_i и B_i, редом средишта дужи DA_{i+1} и DB_{i+1}. Тада је $DA_n = 2^n DA$, $DB_n = 2^n DB$ и $\sigma(\triangle A_n B_n D) = \pi$.

Треће, нека је сад $\triangle PQR$ произвољни троугао. И он се може неком својом висином разложити на два правоугла, нпр. висином PS.



Посматрајмо $\triangle PSQ$. Постоји n т.д. је истовремено $DA_n > SP$ и $DB_n > SQ$. Нека су X и Y т.д. $\mathcal{B}(S, P, X)$, $\mathcal{B}(S, Q, Y)$, $SX = DA_n$ и $SY = DB_n$. Тада је, по СУС, $\triangle XSY \cong \triangle A_n DB_n$, па је $\delta(\triangle XSY) = \delta(\triangle A_n DB_n) = 0$. Сада

$0 = \delta(\triangle XSY) = \delta(\triangle XYQ) + \delta(\triangle XQS)$

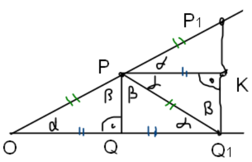
$= \underbrace{\delta(\triangle XYQ)}_{0\le} + \underbrace{\delta(\triangle XQP)}_{0\le} + \underbrace{\delta(\triangle PQS)}_{0\le}$, па је

$\delta(\triangle PQS) = 0$. Слично је и $\delta(\triangle PRS) = 0$, па је и $\delta(\triangle PQR) = \delta(\triangle PQS) + \delta(\triangle PRS) = 0 + 0 = 0$. $\square$

Теорема (23.3)

Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова π акко свака права нормална на једном краку произвољног оштрог угла сече други крак тог угла.

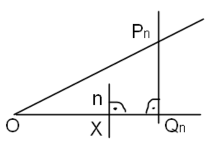
Доказ. Нека је збир углова у троуглу π и pOq произвољан оштар угао.



$\Rightarrow$: Нека је $P \in p$ и Q подножје нормале из P на q. Нека су P_1 и Q_1 т.д. су P и Q, редом, средишта OP_1 и OQ_1. Тада, по СУС, $\triangle OQP \cong \triangle Q_1 QP$. Нека је K т.д. $Q, K \div PQ_1$ и $(P, Q, Q_1) \cong (Q_1, K, P)$. Тада је $\angle POQ \cong \angle PQ_1 Q \cong \angle Q_1 PK = \alpha$, $\angle OPQ \cong \angle Q_1 PQ \cong \angle PQ_1 K = \beta$. Важи $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Зато је $\angle P_1 PK = \pi - 2\beta - \alpha = \alpha$, па је $\triangle P_1 PK \cong \triangle POQ$, по СУС.

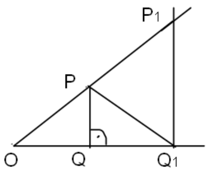
Зато је и $\angle PP_1 K = \beta$, $\angle P_1 KP = \frac{\pi}{2}$. Сада, $\angle P_1 KQ_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$, па су тачке P_1, K, Q_1 колинеарне и важи $\mathcal{B}(P_1, K, Q_1)$. Зато је $\angle KQ_1 Q = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ уједно и угао $\triangle P_1 Q_1 O$. Дакле, Q_1 је подножје нормале из P_1 на q.

Наставимо поступак. Нека су $P_2, \ldots, P_n$ и $Q_2, \ldots, Q_n$ т.д. су P_i и Q_i средишта дужи OP_{i+1} и OQ_{i+1}. Тада је Q_n подножје нормале из P_n на q. При том је $OP_n = 2^n OP$, $OQ_n = 2^n OQ$.



Нека је $n \perp q$ произвољна и $n \cap q = \{X\}$. Постоји n т.д. је $OQ_n > OX$. Тада n сече једну ивицу $\triangle OP_n Q_n$, па сече још тачно једну ивицу. Ако би се праве n и $P_n Q_n$ секле постојале би две разне нормале из пресечне тачке на q. Зато $n \cap P_n Q_n = \varnothing$ и n сече дуж OP_n у некој тачки.

$\Leftarrow$: Нека свака права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак. Претпоставимо да је збир углова у троуглу мањи од π.



Нека су $Q, Q_1 \in q$ т.д. је Q средиште OQ_1 и нека нормале на q у Q и Q_1 секу p у P и P_1. Важи $\triangle PQO \cong PQQ_1$ по СУС, па је $\delta(\triangle PQO) = \delta(\triangle PQQ_1) > 0$. При том је

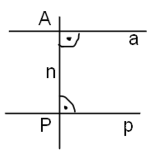
$$\delta(\triangle OP_1Q_1) = \delta(\triangle PQO) + \delta(\triangle PQQ_1) + \underbrace{\delta(\triangle PP_1Q_1)}_{>0}$$

па је $\delta(\triangle OP_1Q_1) > 2\delta(\triangle PQO)$. Нека су $Q_2, \ldots, Q_n$ т.д. је Q_i средиште OQ_{i+1} и $P_i, i = 2, \ldots, n$ пресеци нормала из Q_i на q са p. Тада је $2^n \underbrace{\delta(\triangle OPQ)}_{0<} < \delta(\triangle OP_nQ_n) < \pi$, што је у контрадикцији са непрекидношћу реалних бројева. $\square$

Теорема (23.4)

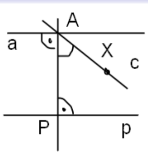
Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова π акко за сваку тачку A и праву p која је не садржи, у њима одређеној равни постоји тачно једна права a инцидентна са A и дисјунктна са p.

Доказ.



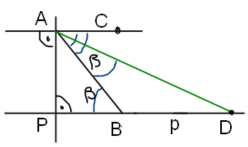
Нека је P подножје нормале n из A на p. Нека је a права, $A \in a$ и $a \perp n$. Тада су a и p дисјунктне, јер би у противном из пресечне тачке постојале две нормале на n. Дакле, без обзира на претпоставку, увек постоји бар једна таква права.

$\Rightarrow$: Нека је збир углова у троуглу π. Треба показати да p сече сваку праву $c \neq a$, $A \in c$.



Нека је $X \in c$, т.д. $X, P \doteq a$. Тада $\angle PAX$ припада једном правом углу између AP и a, па је $\angle PAX$ оштар. Како је збир углова у троуглу π, свака права нормална на краку AP тог оштрог угла сече други крак, па како је $p \perp AP$ следи p сече AX, тј. c.

$\Leftarrow$: Нека једино a испуњава услов. Претпоставимо да је збир углова сваког троугла мањи од π. Нека је $B \in p$, $B \neq P$. Нека је $C \in a$, $C \neq A$, $C, B \doteq n$. Како је $\angle PAB + \angle PBA < \frac{\pi}{2}$, а $\angle PAB + \angle BAC = \frac{\pi}{2}$, следи да је $\angle BAC > \angle PBA$. Зато постоји полуправа $Ax \subset \angle BAC$ т.д. $\angle(AB, Ax) \cong \angle PBA$. Како, по претпоставци p сече све праве кроз A сем a, следи да постоји $Ax \cap p = \{D\}$.



Сада је $\angle PBA \cong \angle BAD$, а при том су то спољашњи и несуседни унутрашњи угао за $\triangle ABD$ ($\lightning$). Дакле $\delta(\triangle APB) = 0$. $\square$