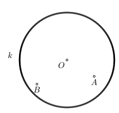
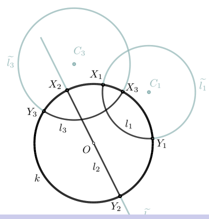
27. Поенкареов диск модел

Приказаћемо један познати модел хиперболичке геометрије равни, Поенкареов диск модел.



Посматрајмо јединични круг k еуклидске равни π са центром O. Тачке унутрашњости овог круга су тачке модела и називамо их h-**тачкама**.

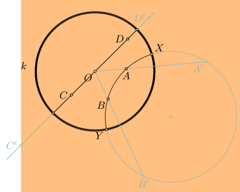
Скуп свих h-тачака је h-**раван**, круг k називамо **апсолутом**, а специјално тачку O називамо **центром апсолуте**.



Нека је $\widetilde{l}$ права или круг равни π, нормалан на апсолуту k. Тада $\widetilde{l}$ и k имају две заједничке еуклидске тачке X и Y.

Тада је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу права ако и само ако $\widetilde{l}$ садржи центар апсолуте O. Скуп тачака $\widetilde{l}$ које су уједно и h-тачке је h-**права** и означаваћемо је са l. Тачке пресека апсолуте и $\widetilde{l}$, X и Y, називаћемо **бесконачно далеким тачкама** h-праве l.

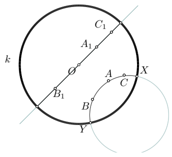
Примедба

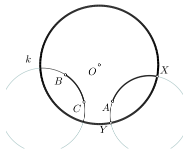


Видели смо на вежбама да се инверзијом у односу на круг скуп права и кругова слика у себе. При том су праве и кругови ортогонални на круг инверзије инваријантни за ту инверзију. Дакле инверзијом ψ_k свака права или круг $\widetilde{l}$ ортогонална на k се слика у себе.

Нека су A и B h-тачке и l h-права која их садржи. Тада $\widetilde{l}$ садржи и $A' = \psi_k(A)$ и $B' = \psi_k(B)$. Дакле, $\widetilde{l}$ је е-епицикл (круг или права) одређен тачкама A, B, A'. Он садржи и B'. Зато за две h-тачке постоји тачно једна h-права која их садржи.

Ако је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу круг, сматрамо да је h-тачка A h-**између** h-тачака B и C ако припада луку BC круга $\widetilde{l}$ који је подскуп унутрашњости апсолуте.
Ако је $\widetilde{l}$ у еуклидском смислу права, h-тачка A h-**између** h-тачака B и C ако је и еуклидски A између B и C.
По дефиницији, све h-тачке A које су h-између B и C је h-**дуж** BC.

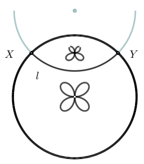




Може се показати да овако дефинисане h-тачке, h-праве и релација h-између задовољавају аксиоме инциденције и аксиоме поретка.

Ако $\widetilde{l}$ сече апсолуту у тачкама X и Y и садржи h-тачку A, онда су **отворене** h-**полуправе** скупови тачака отворених лукова $\widehat{AX}$ и $\widehat{AY}$ који припадају h-равни.

h-**рефлексија.**
Нека је l h-права. Тада је $\widetilde{l}$ круг или права ортогонална на апсолуту k.
Ако је $\widetilde{l}$ права h-**рефлексију** у односу на l дефинишемо као рестрикцију еуклидске рефлексије $\mathcal{S}_{\widetilde{l}}$ на h-раван (унутрашњост апсолуте).



Ако је $\widetilde{l}$ круг, дефинишемо да је h-**рефлексија** у односу на l рестрикција инверзије $\psi_{\widetilde{l}}$ на h-раван.

Уочимо да у оба случаја $\mathcal{S}_{\widetilde{l}}$, односно $\psi_{\widetilde{l}}$ сликају апсолуту у себе (јер је $\widetilde{l} \perp k$), а затим и h-раван у себе, па је h-рефлексија добро дефинисана. При том се h-полураван чији је руб l слика у комплементну h-полураван.

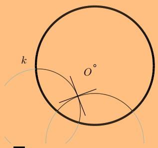
Даље, дефинишемо h-изометрију као композицију коначно много h-рефлексија. Рећи ћемо да је пар h-тачака (A, B) h-**подударан пару** (C, D) $((A, B) \cong_h (C, D))$, ако постоји h-изометрија која слика h-тачке A и B у C и D.

Затим се може показати да овако дефинисана релација подударности парова h-тачака задовољава аксиоме подударности, а даље и да су задовољене аксиоме непрекидности, па је у питању модел апсолутне геометрије.

Еуклидски, угао између две глатке криве које се секу је угао између њихових тангенти у пресечној тачки. За круг, као епицикл смо формално дефинисали тангенту.

Примедба *Инверзија у односу на круг "чува" углове, тј. ако се две криве секу под углом α, њихове слике у инверзији се секу под подударним, али супротно оријентисаним углом.*

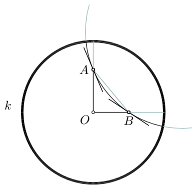
Примедба...



С обзиром да је h-опружен угао и еуклидски опружен, због ове особине инверзије следи да је "његова половина" h-прав угао уједно и еуклидски прав, итд.

Дакле, важи да је h-угао између l_1 и l_2 исте мере као еуклидски угао између тангенти на $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$.

Посматрајмо сада h-троугао ABO где је O центар апсолуте т.д. је h-угао AOB прав.



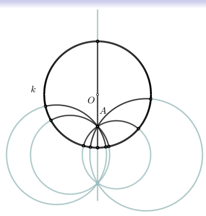
Посматрајмо и еуклидску, као и h-праву l одређену h-тачкама A и B. Тангента на $\widetilde{l}$ у тачки A припада еуклидском углу $\angle OAB$, па је $\angle_h OAB < \angle_e OAB$. Слично, $\angle_h OBA < \angle_e OBA$, док је $\angle_h AOB = \angle_e AOB$.

Зато је $\sigma_h(\triangle_h ABO) < \sigma_e(\triangle_e ABO) = \pi$. Дакле, $\triangle_h ABO$ има збир унутрашњих углова мањи од π, а по 2. Лежандровој теореми то важи за сваки троугао, а у датом моделу онда важи аксиома V-H Лобачевског, тј. у питању је модел хиперболичке геометрије којег зовемо **Поенкареовим диск моделом**.

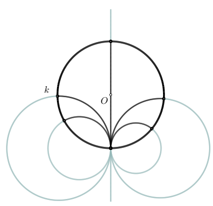
Две h праве l_1 и l_2 се секу ако имају заједничку неку h-тачку A (тада $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ имају заједничку и тачку $\psi_k(A)$).

Може се показати да су две h-праве l_1 и l_2 паралелне акко имају заједничку бесконачно далеку тачку, тј. ако се $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ додирују у тачки апсолуте.

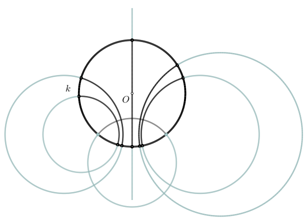
h-праве l_1 и l_2 су хиперпаралелне ако $\widetilde{l}_1$ и $\widetilde{l}_2$ немају заједничких (еуклидских) тачака. Тада постоји тачно једна h-права ортогонална на l_1 и l_2.



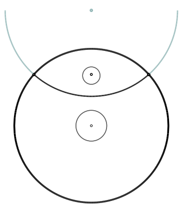
Конкурентне праве



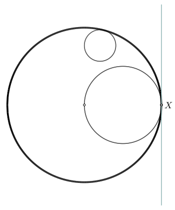
Паралелне праве



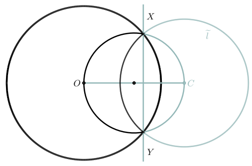
Хиперпаралелне праве



h-кругови симетрични у односу на h-праву



Орицикли



Еквидистанта са основицом l која садржи O