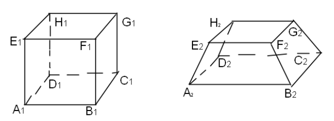
9. Полиедри нултог рода

Нека су ω_1 и ω_2 два полиедра и $A_i, i = 1, 2$ скуп чији су елементи темена ивице и пљосни полиедра ω_i.

Дефиниција

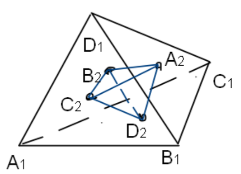
Ако постоји бијекција $A_1 \to A_2$ којом се инцидентна темена, ивице и пљосни ω_1 сликају у инцидентна темена, ивице и пљосни ω_2 онда су ω_1 и ω_2 **изоморфни**.



Ако задамо да се $A_1, B_1, \ldots$ сликају РЕДОМ у $A_2, B_2, \ldots$ онда се ивица A_1B_1 инцидентна са A_1 и B_1 мора сликати у A_2B_2 која је инцидентна са A_2 и B_2. Слично, пљосан $A_1B_1C_1D_1$ инцидентна са ивицама A_1B_1 и B_1C_1 се слика у $A_2B_2C_2D_2$, инцидентну са A_2B_2 и B_2C_2.

Дефиниција

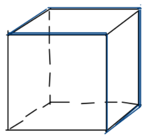
Ако постоји бијекција $A_1 \to A_2$ којом се инцидентна темена, ивице и пљосни ω_1 сликају у инцидентне пљосни, ивице и темна ω_2 онда су ω_1 и ω_2 **дуални**.



Ако задамо да се пљосни $B_1C_1D_1$, $A_1C_1D_1$, $A_1B_1D_1$ и $A_1B_1C_1$ сликају РЕДОМ у темена A_2, B_2, C_2, D_2, онда се ивица C_1D_1 инцидентна са $B_1C_1D_1$ и $A_1C_1D_1$ слика у ивицу A_2B_2 инцидентну са A_2 и B_2. Слично се C_1B_1 слика у A_2D_2, а теме C_1 инцидентно са C_1D_1 и C_1B_1 у пљосан $A_2B_2D_2$ инцидентну са A_2B_2 и A_2D_2.

Дефиниција

Прост полигон чије су ивице уједно и ивице полиедарске пов. ω је **повратни полигон** те површи.



Дакле, повратни полигон ω је било која затворена полигонска линија, без самопресецања чије су ивице неке од ивица полиед. површи.

Дефиниција

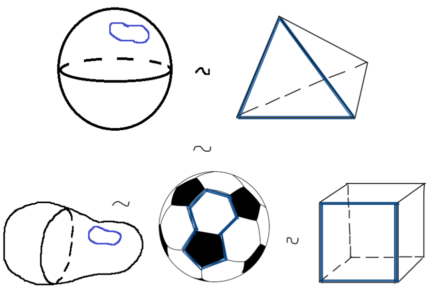
Повратни полигон **разлаже** ту површ ако постоји пар пљосни те површи такве да сваки ланац те површи који их спаја садржи најмање један пар суседних пљосни чија је заједничка ивица уједно и ивица повратног полигона.

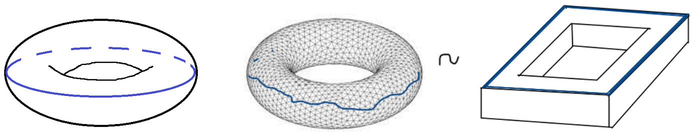
Неформално говорећи, ако бисмо "разрезали" полиедарску површ по повратном полигону, добили бисмо неповезане компоненте. Протумачимо дефиницију: постоји пар пљосни (које ће завршити у одвојеним компонентама) јер ће СВАКИ ланац који их спаја бити разрезан (зато што садржи пар суседних пљосни чија је заједничка ивица са повратног полигона па ће бити "пресечена").

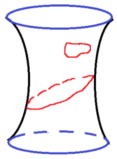
Дефиниција

Род полиедарске површи је максималан број повратних полигона те површи, које немају заједничких тачака и не разлажу ту површ.

Род површи је термин из математичке дисциплине која се зове топологија. У еуклидској геометрији коју смо учили у школи два јединична квадрата се не разликују, заправо постоји пресликавање "које одговара тој геометрији" које слика један у други.
По истом принципу, постоје пресликавања која "одговарају" топологији. Та пресликавања "занемарују" меру, ивице и темена, "чувају" непрекидност.







Ако "исечемо" полиед. површ са горње слике у средини, по плавом полигону, добићемо површ "еквивалентну" омотачу ваљка (слика лево). Крива по којој смо секли је сада плави руб. Дакле можемо у овом случају наћи бар један повратни полигон који не разлаже површ.

Ако "потражимо" још неки повратни полигон, он са претходним не сме имати заједничких тачака. Зато ће бити еквивалентан некој од кривих нацртаних црвеном бојом (обилази око осе ваљка или не). У сваком случају, следећи повратни полигон ће површ разложити.

Може се показати да је ово пример одабира максималног броја повратних полигона које не разлажу дату површ, па је њен род (као и род торуса) један.

Надаље се бавимо полиедарским површима рода 0 (онима који су "еквивалентни" сфери).

Теорема (8.5)

(Ојлерова формула) Нека су T, I и P број темена, ивица и пљосни полиедарске површи рода нула. Тада је
$T - I + P = 2.$ **БД**

$\chi = T - I + P$ се назива карактеристиком површи.

Дефиниција

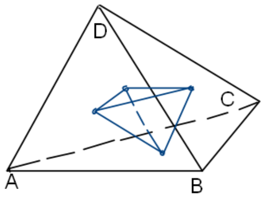
Полиедар је **тополошки правилан** ако:
-свако његово теме је инцидентно са истим бројем ивица
-свака његова пљосан је инцидентна са истим бројем ивица.

Теорема

Постоји тачно 5, неизоморфних, тополошки правилних полиедарских површи рода нула.

Доказ. Прво ћемо показати да постоје тих 5 полиедарских површи, а затим ћемо показати да других, неизоморфних њима, нема.

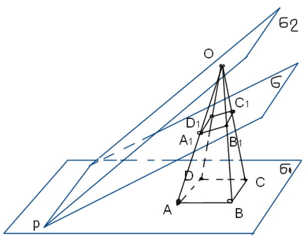
Тетраеадар. Постоје 4 некомпланарне тачке, A, B, C, D.



Њима су одређене троугаоне површи ABC, ABD, ACD и BCD, за које се може показати да чине повезани скуп троугаоних површи који је и полиедарска површ, и то рода нула. При том свака пљосан је троугаона и свако теме је инцидентно са три ивице, па је површ и тополошки правилна.

Овакав полиедар називамо **тетраедром**. Он има $T = 4$ темена, $I = 6$ ивица и $P = 4$ пљосни. Уочимо да је и полиедар дуалан тетраедру такође тетраедар, зато је $T = P$.

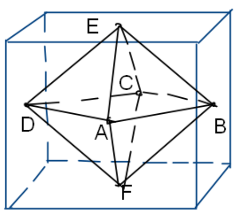
Хексаедар. Нека је $ABCD$ четвороугао равни π и p права те равни таква да су A, B, C, D са исте њене стране. Нека је $O \notin \pi$ и A_1 тачка отворене дужи OA. Нека су σ, σ_1 и σ_2 полуравни са рубом p које, редом, садрже тачке A_1, A, O.



С обзиром да полураван σ сече отворену дуж OA она припада отвореном диедру $\sigma_1\sigma_2$. Зато сече и сваку другу отворену дуж којој су темена на пљоснима. Посебно, сече OB, OC, OD у B_1, C_1, D_1. Праве AA_1 и BB_1 се секу па је ABB_1A_1 раван полигон. Слично, BCC_1B_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1, $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ су полигонске површи.

Као раније, оне чине полиедарску површ рода нула. При том, свака пљосан је инцидентна са 4 ивице, а свако теме са 3, па је тополошки правилан. Важи $T = 8$, $I = 12$, $P = 6$. Овај полиедар зовемо **хексаедром**.

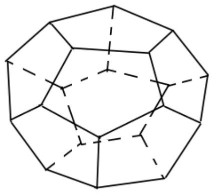
Октаедар. Нађимо полиедарску површ дуалну хексаедру. Одаберимо по једну тачку са сваке отворене пљосни хексаедра A, B, C, D, E, видети слику. С обзиром да суседне пљосни хексаедра имају заједничку ивицу, повежимо дужима тачке са суседних пљосни. То су ивице нове површи.



$T = 6$, $I = 12$, $P = 8$.

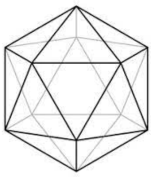
Троугаоне површи $ABE, BCE, \ldots$ чине полиедарску површ, рода нула, дуалну хексаедру. Свака пљосан је троугаона, свако теме је инцидентно са 4 ивице. Зовемо га **октаедром**. Како је теме хексаедра инцидентно са три пљосни, том темену одговара троугаона пљосан октаедра.

Додекаедар. Сличним поступком као за хексаедар може се показати егзистенција **додекаедра**.



Његове пљосни су петоуглови, а свако теме је инцидентно са 3 пљосни. Додекаедар има $T = 20$ темена, $I = 30$ ивица и $P = 12$ пљосни.

Икосаедар. Полиедар дуалан додекаедру је икосаедар. С обзиром да су код додекаедра три петоугла инцидентна са једним теменом, код икосаедра је са једним теменом инцидентно пет троуглова.



Зато икосаедар има $T = 12$ темена, $I = 30$ ивица и $P = 20$ пљосни.

Покажимо сада да је сваки тополошки правилан полиедар рода нула изоморфан једном од претходних. Нека су његове пљосни инцидентне са p ивица, а темена са q ивица.

"Пребројимо" ивице овог полиедра.
$qT = 2I = pP$, (јер је свака ивица инцидентна са 2 темена, односно са две пљосни).
Из Ојлерове формуле онда следи

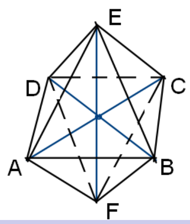
$$\frac{2I}{q} - I + \frac{2I}{p} = 2, \text{односно}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{I} > \frac{1}{2}.$$

При том је $p, q \geq 3, p, q \in \mathbb{N}$, а претходна неједнакост је симетрична по p и q. Лако је утврдити да су једина решења те неједначине $(p, q) \in \{(3,3), (3,4), (4,3), (3,5), (5,3)\}$.

Случај $(p, q) = (3, 3)$**.** С обзиром да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l}$, следи да је $l = 6$, а затим полиедар има $T = \frac{2l}{q} = 4$ темена и $P = \frac{2l}{p} = 4$ пљосни. Пљосни су $(p = 3)$ троугаоне, а свако теме је инцидентно са $q = 3$ ивице, па и пљосни. Дакле, у питању је тетраедар.
Слично се остали случајеви своде на неки од преосталих полиедара. □

На тему полиедара се више нећемо враћати. Зато ћемо сада нагласити следеће. За правилни полиедар постоји група "кретања" простора које га сликају у себе. Зато он има за пљосни међусобно подударне правилне многоуглове (у терминима које знамо из школе, а које ћемо тек касније на курсу увести). Постоји тачно 5 правилних полиедара, који се називају Платоновим телима. То су правилни полиедри горе наведених типова.



Пљосни правилног октаедра су једнакостранични троуглови, сваки од дијагоналних пресека $ABCD$, $AFCE$, $FBED$ је квадрат, па су дијагонале AC, BD, EF подударне и међусобно се полове.